平成 23 年度前期中間試験

$\boxed{1}$ $A = \left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n \cdot \dfrac{n+2}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ とおく. $\sup A$, $\inf A$ を求めよ. **答のみでよい.**

$\boxed{2}$ 次の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n+2)!}{(2n)!n^n}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{x - \arctan x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{\tan^4 x} \right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left\{ \frac{1}{\log(1+3x)} - \frac{1}{3x\cos x} \right\}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

(6) $\arctan\left(\tan \dfrac{4}{7}\pi \right)$

(7) $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{4} + \arctan\dfrac{1}{8} - \arctan\dfrac{1}{20}$

$\boxed{3}$ $2\arctan(x + \sqrt{x^2+1}) + \arctan\dfrac{1}{x} = \begin{cases} \pi & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ が成り立つことを示せ.

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 次を求めよ．**(1) 〜 (5) は答のみでよい．**

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!n^n}{(2n)!}}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1-x}{(\arccos x)^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{\sin^5 x}-\frac{1}{x^2}\right)$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$

(5) $(x^{n-1}\log x)^{(n)} \quad (n\in\mathbb{N})$ (6) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$

(7) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}(3x^2+1)(\arctan x)^2dx$ (8) $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$

$\boxed{2}$ 次の関数の Maclaurin（マクローリン）展開をかっこ内の項まで求めよ．ただし，**係数は既約分数**にすること．

(1) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$ （4 次） (2) $e^{\arctan x}$ （5 次）

※必要ならば，次の Maclaurin 展開を用いてよい．

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\cdots \quad (x\in\mathbb{R})$$

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots \quad (-1\leqq x\leqq 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\cdots \quad (-1<x<1)$$

$\boxed{1}$ $\dfrac{-10x^2-15x+43}{(x-1)(x-2)(x^2+6x+11)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+6x+11}$

が常に成り立つとき

$A = \boxed{}$, $B = \boxed{}$, $C = \boxed{}$, $D = \boxed{}$

だから

$\displaystyle\int \frac{-10x^2-15x+43}{(x-1)(x-2)(x^2+6x+11)}dx$

$\boxed{2}$ $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{1}{5\cos x + 12\sin x + 13}dx$ を求めよ．

$\boxed{3}$ $\sqrt{x^2+x+1} + x = t$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{7}{(8x+3)\sqrt{x^2+x+1}}dx$ を求めよ．

$\boxed{4}$ 次の広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^3 (2x+1)\log x dx$　　　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3+1}dx$

$\boxed{5}$ $f(x,y) = x^3+y^3-3x^2-3y^2-xy$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．**答のみでよい．**

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

※ $f(x,y)$：C^2 級で，$f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0$, $f_{xx}(a,b)>0 \implies f(a,b)$：極小値
$H(a,b)>0$, $f_{xx}(a,b)<0 \implies f(a,b)$：極大値
$H(a,b)<0 \implies f(a,b)$：極値でない
ただし $H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$ とする．

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ $f(x,y)=x^3+y^3+\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{9}{2}y^2+6xy$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(3) $x^2y+xy^2=2$ に制限した $f(x,y)$ が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ.

$\boxed{2}$ 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2\left(\int_1^x \frac{x}{y}dy\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\left(\int_x^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^2\left(\int_{\frac{x}{2}}^1 e^{-y^2}dy\right)dx$ （順序変更）

(4) $\displaystyle\int\int_D \frac{y^2}{x^2}dxdy \quad \left(D: 1\leqq x^2+y^2\leqq 4,\ -\frac{x}{\sqrt{3}}\leqq y\leqq\sqrt{3}\,x\right)$

(5) $\displaystyle\int\int_D (x+y)dxdy \quad (D: x\leqq x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0)$