

科目名	微積分学	対 象	1OB-A	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 24 年 11 月 28 日 (水) 3 回目 (~ 時限目)			担 当	石川 学		学 年		氏 名		
試 験 時 間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照持込可 ()							

1
$$\frac{-8x^2 - 6x - 4}{x^2(x+1)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+4}$$

が常に成り立つとき

$A = \square, B = \square, C = \square,$

$D = \square, E = \square$

である．空欄を埋めて，次の積分を求めよ．

$$\int \frac{-8x^2 - 6x - 4}{x^2(x+1)(x^2+2x+4)} dx$$

2 次の積分を，カッコ内の置換により求めよ．答えは， t についての積分を実行したところまででよいことにする（ x の式にもどさなくてもよいことにする）．

(1)
$$\int \frac{\sin x + 3 \cos x + 3}{\sin x (\sin x + \cos x + 1)} dx \quad \left(\tan \frac{x}{2} = t \right)$$

(2)
$$\int \frac{1}{x \sqrt{2x^2 + 5x + 4}} dx \quad \left(\sqrt{2x^2 + 5x + 4} + \sqrt{2}x = t \right)$$

□3 次の広義積分を求めよ.

(1) $\int_{-2}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$

(2) $\int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^3} dx$

□4 $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 + y^2 - x^2y^2$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ. 答のみでよい.

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

※ $f(x, y) : C^2$ 級で, $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) : \text{極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極大値}$

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする.

科目名	微積分学	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 24 年 11 月 28 日 (水)	3 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							

$$[1] \frac{-8x^2 - 6x - 4}{x^2(x+1)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x^2+2x+4} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+4}$$

が常に成り立つとき

$$A = \boxed{0}, B = \boxed{-1}, C = \boxed{-2},$$

$$D = \boxed{2}, E = \boxed{3}$$

である。空欄を埋めて、次の積分を求めよ。

$$\begin{aligned} & \int \frac{-8x^2 - 6x - 4}{x^2(x+1)(x^2+2x+4)} dx \\ &= \int \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x+1} + \frac{2x+3}{x^2+2x+4} \right) dx \\ &= \int \left\{ -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x+1} + \frac{(2x+2)+1}{x^2+2x+4} \right\} dx \\ &= \int \left\{ -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x+1} + \frac{2x+2}{x^2+2x+4} + \frac{1}{(\sqrt{3})^2+(x+1)^2} \right\} dx \\ &= \frac{1}{x} - 2 \log|x+1| + \log(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

[2] 次の積分を、カッコ内の置換により求めよ。答えは、 t についての積分を実行したところまででよいことにする (x の式にもどさなくてもよいことにする)。

$$\begin{aligned} (1) & \int \frac{\sin x + 3 \cos x + 3}{\sin x(\sin x + \cos x + 1)} dx \quad \left(\tan \frac{x}{2} = t \right) \\ &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} + 3, \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3}{\frac{2t}{1+t^2} \left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 \right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{t+3}{t(t+1)} dt \\ &= \int \left(\frac{3}{t} - \frac{2}{t+1} \right) dt \\ &= 3 \log|t| - 2 \log|t+1| \end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{1}{x\sqrt{2x^2+5x+4}} dx \quad (\sqrt{2x^2+5x+4} + \sqrt{2}x = t)$$

$$\sqrt{2x^2+5x+4} + \sqrt{2}x = t \text{ とおく}$$

$$\sqrt{2x^2+5x+4} = t - \sqrt{2}x \text{ であるから、両辺 2 乗すると}$$

$$2x^2+5x+4 = t^2 - 2\sqrt{2}tx + 2x^2 \quad \therefore x = \frac{t^2-4}{2\sqrt{2}t+5}$$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot (2\sqrt{2}t+5) - (t^2-4) \cdot 2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2}t+5)^2} = \frac{2(\sqrt{2}t^2+5t+4\sqrt{2})}{(2\sqrt{2}t+5)^2}$$

さらに

$$\sqrt{2x^2+5x+4} = t - \sqrt{2} \cdot \frac{t^2-4}{2\sqrt{2}t+5} = \frac{\sqrt{2}t^2+5t+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}t+5}$$

よって

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x\sqrt{2x^2+5x+4}} dx \\ &= \int \frac{1}{\frac{t^2-4}{2\sqrt{2}t+5} \cdot \frac{\sqrt{2}t^2+5t+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}t+5}} \cdot \frac{2(\sqrt{2}t^2+5t+4\sqrt{2})}{(2\sqrt{2}t+5)^2} dt \\ &= \int \frac{2}{t^2-4} dt \\ &= \int \frac{2}{(t-2)(t+2)} dt \\ &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} (\log|t-2| - \log|t+2|) \end{aligned}$$

③ 次の広義積分を求めよ。

$$(1) \int_{-2}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x+\frac{1}{2}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} \int_{-2}^R \frac{1}{x^2+x+1} dx &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right]_{-2}^R \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \arctan \frac{2R+1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2R+1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{5}{3\sqrt{3}} \pi \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^3} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{(x+1)^3} dx &= -\frac{\log x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x(x+1)^2} dx \\ &= -\frac{\log x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right\} dx \\ &= -\frac{\log x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \log x - \log(x+1) + \frac{1}{x+1} \right\} \\ &= \frac{(x^2+2x)\log x}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2} \log(x+1) + \frac{1}{2(x+1)} \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^3} dx &= \left[\frac{(x^2+2x)\log x}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2} \log(x+1) + \frac{1}{2(x+1)} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3 \cdot 0}{4} - \frac{(\varepsilon^2+2\varepsilon)\log \varepsilon}{(\varepsilon+1)^2} \right\} - \frac{1}{2} \{ \log 2 - \log(\varepsilon+1) \} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon+1} \right) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^3} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{(\varepsilon+2) \cdot \varepsilon \log \varepsilon}{2(\varepsilon+1)^2} - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log(\varepsilon+1) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon+1} \right) \right\} \\ &= -\frac{2 \cdot 0}{2} - \frac{1}{2} \log 2 + 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\cdot H\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} > 0, f_{xx}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} < 0$$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16} : \text{極大値}$$

$$\cdot H(2, 2) = -220 < 0$$

$$\therefore f(2, 2) : \text{極値ではない}$$

④ $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 + y^2 - x^2y^2$ について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ。答のみでよい。

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ。

※ $f(x, y) : C^2$ 級で、 $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) : \text{極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極大値}$

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする。

$$(1) \begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 + 2x - 2xy^2 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ f_y(x, y) = 3y^2 + 2y - 2x^2y = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } x(3x + 2 - 2y^2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \vee 3x + 2 - 2y^2 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

(i) $x = 0$ のとき

$$\textcircled{2} \text{ より } 3y^2 + 2y = 0$$

$$y(3y + 2) = 0 \therefore y = 0, -\frac{2}{3}$$

(ii) $\textcircled{3}$ のとき

$$\textcircled{2} \text{ より } y(3y + 2 - 2x^2) = 0$$

$$\therefore y = 0 \vee 3y + 2 - 2x^2 = 0 \cdots \textcircled{4}$$

○ $y = 0$ のとき

$$\textcircled{3} \text{ より } 3x + 2 = 0 \therefore x = -\frac{2}{3}$$

○ $\textcircled{4}$ のとき

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \text{ より } 3(x - y) + 2(x - y)(x + y) = 0$$

$$(x - y) \{ 3 + 2(x + y) \} = 0$$

$$\therefore x = y \vee x + y = -\frac{3}{2}$$

・ $x = y$ のとき

$$\textcircled{3} \text{ より } 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 2) = 0 \therefore x = -\frac{1}{2}, 2$$

・ $x + y = -\frac{3}{2}$ のとき

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ より } 3(x + y) + 4 - 2\{(x + y)^2 - 2xy\} = 0$$

$$-\frac{9}{2} + 4 - 2\left(\frac{9}{4} - 2xy\right) = 0 \therefore xy = \frac{5}{4}$$

よって、 x, y は $t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{5}{4} = 0$ の解 t とおける

⑧ $\frac{9}{4} - \frac{20}{4} = -\frac{11}{4} < 0$ より実数解をもたない。

以上より、停留点は

$$(0, 0), \left(0, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (2, 2)$$

$$(2) f_{xx}(x, y) = 6x + 2 - 2y^2, f_{yy}(x, y) = 6y + 2 - 2x^2, f_{xy}(x, y) = -4xy$$

$$H(x, y) = (6x + 2 - 2y^2)(6y + 2 - 2x^2) - (-4xy)^2$$

$$\cdot H(0, 0) = 4 > 0, f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$$

$$\therefore f(0, 0) = 0 : \text{極小値}$$

$$\cdot H\left(0, -\frac{2}{3}\right) = H\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{20}{9} < 0$$

$$\therefore f\left(0, -\frac{2}{3}\right), f\left(-\frac{2}{3}, 0\right) : \text{極値ではない}$$