科目名	微積分学	対象	1OB-A	学部研究科	理学部第一部	学科専攻科		学籍番号		評点
平成 25 年 1 月 16 日 (水) 3 回目 (～ 時限目)				担当	石川　学	学年		氏名		
試験時間	60 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

平成 24 年度後期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ $f(x,y) = x^4 + y^4 - 5x^2 - 5y^2 + 6xy$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(3) $x^3 + y^3 = 2$ に制限した $f(x,y)$ が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

$\boxed{2}$ 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_2^{2x} \frac{x}{y} dy \right) dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_{-x^2}^{x} \frac{x}{x^2+y^2} dy \right) dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{2\sqrt{x}}^{2} \sqrt{y^3+1}\, dy \right) dx$ （順序変更）

(4) $\displaystyle\int\int_D \frac{y^4}{x^2} dxdy \quad \left(D : 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leqq y \leqq \sqrt{3}x \right)$

(5) $\displaystyle\int\int_D (2x+y) dxdy \quad (D : x \leqq x^2 + y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

東京理科大学　平成　年　月　日　**試験答案**

科目名		担当	先生	評点
該当学部を○で囲む	理学部 1 / 工学部 2　部　学科　年　番	氏名	H24 KT	

1　$f = x^4 + y^4 - 5x^2 - 5y^2 + 6xy$

(1) $\begin{cases} f_x = 4x^3 - 10x + 6y = 0 & \text{— ①} \\ f_y = 4y^3 - 10y + 6x = 0 & \text{— ②} \end{cases}$

①−② より

$4(x^3-y^3) - 16(x-y) = 0$

$\cancel{4}(x-y)\{(x^2+xy+y^2) - 4\} = 0$

∴ $y = x$ or $x^2+xy+y^2 = 4$ — ③

①+② より

$4(x^3+y^3) - 4(x+y) = 0$

$\cancel{4}(x+y)\{(x^2-xy+y^2) - 1\} = 0$

∴ $y = -x$ or $x^2-xy+y^2 = 1$ — ④

(i) $y = x$ かつ $y = -x$ のとき $x = y = 0$

(ii) $y = x$ かつ ④ のとき $x^2 = 1$ ∴ $x = \pm 1$

(iii) $y = -x$ かつ ③ のとき $x^2 = 4$ ∴ $x = \pm 2$

(iv) ③ かつ ④ のとき，③と加えて $xy = \frac{3}{2}$

④ より $(x-y)^2 = (x^2-xy+y^2) - xy = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} < 0$ 不適

(i)〜(iv) より，停留点は

$(0,0)$, $(\pm 1, \pm 1)$, $(\pm 2, \mp 2)$ (同)

(2) $f_{xx} = 12x^2 - 10$, $f_{yy} = 12y^2 - 10$, $f_{xy} = 6$

$H = (12x^2-10)(12y^2-10) - 6^2 = 4\{(6x^2-5)(6y^2-5) - 9\}$

・$H(0,0) = 4\cdot 16 = 64 > 0$, $f_{xx}(0,0) = -10 < 0$

∴ $f(0,0) = 0$: 大

・$H(\pm1,\pm1) = 4\cdot(-8) = -32 < 0$

∴ $f(\pm1,\pm1)$: ×　(同)

・$H(\pm2,\mp2) = 4\cdot 352 = 1408 > 0$, $f_{xx}(\pm2,\mp2) = 38 > 0$

∴ $f(\pm2,\mp2) = -32$: 小

(3) $g = x^3 + y^3 - 2$, $\Gamma : g = 0$ とおくと $g(1,1) = 0$

また，$g_y = 3y^2$ より $g_y(1,1) = 3 \neq 0$

よって，陰関数定理より，$(1,1)$ のある開近傍 U 内では，y は x の C^∞ 級関数 $y = \varphi(x)$ となり

$\varphi(1) = 1$, $x^3 + \varphi(x)^3 = 2$ — ⑤

をみたす

⑤の両辺を x で微分すると

$3x^2 + 3\varphi^2\cdot\varphi' = 0$

∴ $x^2 + \varphi^2\varphi' = 0$ — ⑥

⑥で $x = 1$ とすると

$1 + 1^2\cdot\varphi'(1) = 0$ ∴ $\varphi'(1) = -1$

また，⑥の両辺を x で微分すると

$2x + (2\varphi\cdot\varphi')\cdot\varphi' + \varphi^2\cdot\varphi'' = 0$

∴ $2x + 2\varphi(\varphi')^2 + \varphi^2\varphi'' = 0$ — ⑦

⑦で $x = 1$ とすると

$2 + 2\cdot 1\cdot(-1)^2 + 1^2\cdot\varphi''(1) = 0$ ∴ $\varphi''(1) = -4$

さて，U 内では，Γ に制限した f は

$f|_\Gamma = f(x, \varphi(x))$

$= x^4 + \varphi(x)^4 - 5x^2 - 5\varphi(x)^2 + 6x\varphi(x)$

となる．これを $F(x)$ とおき，$F(x)$ が $x = 1$ で極値をとるかどうか調べればよい．

$F' = 4x^3 + 4\varphi^3\cdot\varphi' - 10x - 10\varphi\cdot\varphi' + 6\cdot\varphi + 6x\cdot\varphi'$

$F'(1) = 4 + 4\cdot1^3\cdot(-1) - 10 - 10\cdot1\cdot(-1) + 6\cdot1 + 6\cdot(-1) = 0$

$F'' = 12x^2 + (12\varphi^2\cdot\varphi')\cdot\varphi' + 4\varphi^3\cdot\varphi'' - 10 - (10\varphi')\cdot\varphi' - 10\varphi\cdot\varphi''$
$+ 6\varphi' + 6\cdot\varphi' + 6x\cdot\varphi''$

$= 12x^2 + 12\varphi^2(\varphi')^2 + 4\varphi^3\varphi'' - 10 - 10(\varphi')^2 - 10\varphi\varphi''$
$+ 12\varphi' + 6x\varphi''$

$F''(1) = 12 + 12\cdot1^2\cdot(-1)^2 + 4\cdot1^3\cdot(-4) - 10 - 10\cdot(-1)^2 - 10\cdot1\cdot(-4)$
$+ 12\cdot(-1) + 6\cdot(-4)$

$= 12 + 12 - 16 - 10 - 10 + 40 - 12 - 24$

$= -8 < 0$

∴ $F(1) = -2$: 大

2

$\log x \quad \frac{x^2}{2}$

$\frac{1}{x} \quad x$

(1) $\int_1^2\left(\int_2^{2x}\frac{x}{y}dy\right)dx = \int_1^2\left[x\log y\right]_{y=2}^{y=2x}dx = \int_1^2 x(\log 2x-\log 2)dx = \int_1^2 x\log x\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac12(4\log 2 - 1\cdot 0) - \frac14(4-1) = 2\log 2 - \frac34$

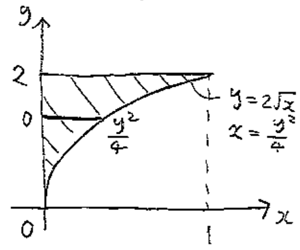
$\arctan x \quad x$

$\frac{1}{1+x^2} \quad 1$

(2) $\int_1^{\sqrt3}\left(\int_{-x^2}^{x}\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx = \int_1^{\sqrt3}\left[\arctan\frac{y}{x}\right]_{y=-x^2}^{y=x}dx = \int_1^{\sqrt3}\left\{\frac{\pi}{4}-(-\arctan x)\right\}dx = \int_1^{\sqrt3}\left(\frac\pi4+\arctan x\right)dx$

$= \left[\frac\pi4 x + \left\{x\arctan x - \frac12\log(1+x^2)\right\}\right]_1^{\sqrt3} = \frac\pi4(\sqrt3-1)+\left(\sqrt3\cdot\frac\pi3 - 1\cdot\frac\pi4\right) - \frac12(\log4-\log2) = \frac{7\sqrt3}{12}\pi - \frac\pi2 - \frac12\log 2$

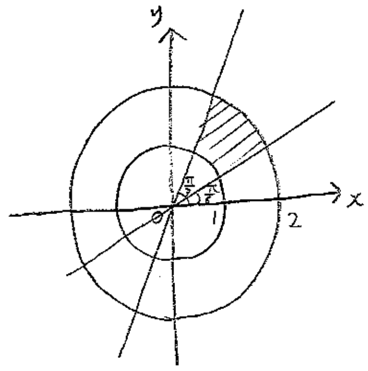
(3) $\int_0^1\left(\int_{2\sqrt x}^2\sqrt{y^3+1}\,dy\right)dx = \int_0^2\left(\int_0^{\frac{y^2}{4}}\sqrt{y^3+1}\,dx\right)dy = \int_0^2\left[x\sqrt{y^3+1}\right]_{x=0}^{x=\frac{y^2}{4}}dy$



$=\int_0^2\frac{y^2}{4}\sqrt{y^3+1}\,dy = \frac1{12}\int_0^2(y^3+1)^{\frac12}\cdot3y^2dy = \frac1{12}\left[\frac23(y^3+1)^{\frac32}\right]_0^2$

$=\frac1{18}(27-1) = \frac{26}{18}=\frac{13}{9}$

(4) $\iint_D \frac{y^4}{x^2}dxdy \quad \left(D: 1\le x^2+y^2\le4,\ \frac{x}{\sqrt3}\le y\le\sqrt3 x\right)$

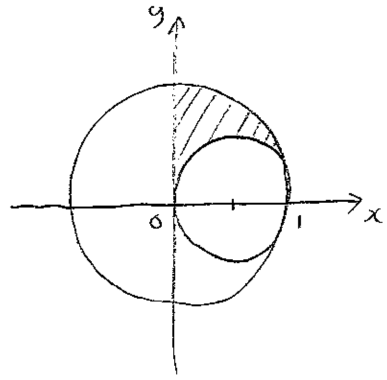


$=\iint_{D'}\frac{r^4\sin^4\theta}{r^2\cos^2\theta}\cdot r\,dr\,d\theta \quad \left(D': \frac\pi6\le\theta\le\frac\pi3,\ 1\le r\le2\right)$

$=\int_1^2 r^3dr\cdot\int_{\frac\pi6}^{\frac\pi3}\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{\cos^2\theta}d\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2\times\int_{\frac\pi6}^{\frac\pi3}\left(\frac1{\cos^2\theta}-2+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta$

$=\frac14(16-1)\left[\tan\theta-\frac32\theta+\frac14\sin2\theta\right]_{\frac\pi6}^{\frac\pi3} = \frac{15}4\left\{\left(\sqrt3-\frac{\sqrt3}3\right)-\frac32\left(\frac\pi3-\frac\pi6\right)+\frac14\left(\frac{\sqrt3}2-\frac{\sqrt3}2\right)\right\} = \frac{15}4\left(\frac{2\sqrt3}3-\frac\pi4\right)=\frac{5\sqrt3}2-\frac{15}{16}\pi$

(5) $\iint_D(2x+y)dxdy\quad(D: x\le x^2+y^2\le1,\ x\ge0,\ y\ge0)$



$=\iint_{D'}(2r\cos\theta+r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta\quad\left(D': 0\le\theta\le\frac\pi2,\ \cos\theta\le r\le1\right)$

$=\int_0^{\frac\pi2}\left\{\int_{\cos\theta}^1(2\cos\theta+\sin\theta)r^2dr\right\}d\theta$

$=\int_0^{\frac\pi2}\left[\frac13(2\cos\theta+\sin\theta)r^3\right]_{r=\cos\theta}^{r=1}d\theta$

$=\frac13\int_0^{\frac\pi2}(2\cos\theta+\sin\theta)(1-\cos^3\theta)d\theta$

$=\frac13\int_0^{\frac\pi2}(2\cos\theta-2\cos^4\theta+\sin\theta-\cos^3\theta\sin\theta)d\theta$

$=\frac13\left(2\cdot1-2\cdot\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac\pi2+1+\left[\frac14\cos^4\theta\right]_0^{\frac\pi2}\right)$

$=\frac13\left\{3-\frac38\pi+\frac14(0-1)\right\}$

$=\frac13\left(\frac{11}4-\frac38\pi\right)$

$=\frac{11}{12}-\frac\pi8$