

科目名	微積分学	対象	1OB-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評 点
平成 24 年 7 月 25 日 (水) 3 回目 (~ 時限目)				担当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	60 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 2. 下記の表参照・持込可 ()							

平成 24 年度前期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

1 次を求めよ. (1) ~ (4) は答のみでよい.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!(n+1)^n}{(2n+1)!}}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - xe^x + x^2}{\sin x - x \cos x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin^3 x} - \frac{x}{\tan^3 x} \right)$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x$

(5) $\int \arcsin x dx$

(6) $\int_0^1 (2x+2) \arctan x dx$

(7) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

2 (1) 次の関数の ^{マクローリン}Maclaurin 展開を 4 次以下の項まで求めよ. 必要ならば, 下の Maclaurin 展開を用いてよい. ただし, 係数は既約分数にすること.

(i) $\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$

(ii) $\sqrt{1+x+x^2}$

(2) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} - \sqrt{1+x+x^2} \right)$ を求めよ. 答のみでよい.

★代表的な関数の Maclaurin 展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \cdots \quad (-1 < x < 1)$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

40 25

東京理科大学 平成 年 月 日 試験 答案

評 点

科目名		担当 先生		
被 当 で 学 部 を む	理学部	1	部	学科 年 番
	工学部	2		氏 名

(1) $a_n = \frac{n!(n+1)^n}{(2n+1)!}$ $2 \leq n < \infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(n+2)^{n+1}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)^n} = \frac{(n+1)(n+2)^{n+1}}{(2n+3)(2n+2)(n+1)^n} = \frac{n+1}{2(2n+3)} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2(2+\frac{3}{n})} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \rightarrow \frac{e}{4} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{e}{4} \quad (5)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - xe^x + x^2}{\sin x - x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - (1 \cdot e^x + x \cdot e^x) + 2x}{\cos x - \{1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x)\}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - (x+1)e^x + 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x - (x+1)e^x + 2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - \{1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x\} + 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - (x+2)e^x + 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2} \left(\frac{\sin x}{x} + e^x + 2 \cdot \frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{-1}{2} (1 + 1 + 2 \cdot 1) = -2 \quad (5)$$

$$\times \frac{\sin x - xe^x + x^2}{\sin x - x \cos x} = \frac{\{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\} - x\{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\} + x^2}{\{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\} - x\{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\}} = \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{-2 + o(1)}{1 + o(1)} \rightarrow -2 \quad (x \rightarrow 0) \quad \triangle (3)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin^3 x} - \frac{x}{\tan^3 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\tan^3 x - \sin^3 x)}{\sin^3 x \tan^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^3 x (1 - \cos^3 x)}{\sin^6 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^3 \frac{1 - \cos^3 x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^3 \frac{1 - \cos x}{x^2} (1 + \cos x + \cos^2 x) = 1^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + 1 + 1) = \frac{3}{2} \quad (5)$$

(4) $\left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x = e^{x \ln \frac{2}{\pi} \arctan x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{2}{\pi} \arctan x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{2}{\pi} \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi} \arctan x} \cdot \frac{2}{\pi}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{\arctan x} = -\frac{2}{\pi} \quad \triangle (3) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}} \quad (5)$$

(5) $\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \quad (5)$

(6) $\int_0^1 (2x+2) \arctan x dx = [(x+1)^2 \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx$

$$= (4 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 \cdot 0) - [x + \ln(1+x^2)]_0^1 = \pi - 1 - (\ln 2 - 0) = \pi - 1 - \ln 2 \quad (5)$$

(7) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{(x^2+1) - x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \left\{ \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} \right\} dx$

$$= \arctan x - \left\{ -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \right\} = \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \arctan x = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} \quad (5)$$

(1) $\frac{e}{4} \quad (5) \quad (2) -2 \quad (5) \quad (3) \frac{3}{2} \quad (5) \quad (4) e^{-\frac{2}{\pi}} \quad (5)$

(5) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \quad (5) \quad (6) \pi - 1 - \log 2 \quad (10) \quad (7) \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} \quad (5)$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad (i) \quad \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} = \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\dots\right) \times \left(1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\dots\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \dots$$

$$+ x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^3 - \frac{5}{16}x^4 + \dots$$

$$+ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{16}x^4 - \dots$$

$$+ \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \dots$$

$$+ \frac{1}{24}x^4 - \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \frac{41}{384}x^4 + \dots$$

(2) (2) (2) (2) (2)

$$(ii) \quad \sqrt{1+x+x^2} = 1 + \frac{1}{2}(x+x^2) - \frac{1}{8}(x+x^2)^2 + \frac{1}{16}(x+x^2)^3 - \frac{5}{128}(x+x^2)^4 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x+x^2) - \frac{1}{8}(x^2+2x^3+x^4) + \frac{1}{16}(x^3+3x^4+\dots) - \frac{5}{128}(x^4+\dots) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + \frac{3}{128}x^4 + \dots$$

(2) (2) (2) (2) (2)

$$(2) \quad \frac{1}{x^3} \left(\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} - \sqrt{1+x+x^2} \right) = \frac{1}{x^3} \left[\left\{ 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3) \right\} - \left\{ 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + o(x^3) \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{6} + o(1) \rightarrow \frac{1}{6} \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} - \sqrt{1+x+x^2} \right) = \frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\times \quad \frac{1}{x^3} \left(\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} - \sqrt{1+x+x^2} \right) = \frac{e^x - \sqrt{(1+x)(1+x+x^2)}}{x^3 \sqrt{1+x}} = \frac{e^x - (1+2x+2x^2+x^3)}{x^3 \sqrt{1+x} \{e^x + \sqrt{(1+x)(1+x+x^2)}\}}$$

$\downarrow 1$ $\downarrow 2$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+2x+2x^2+x^3)}{x^3 \sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - (2+4x+3x^2)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - (4+6x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8e^{2x} - 6}{6} = \frac{8-6}{6} = \frac{1}{3}$$