

科目名	微積分学	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 25 年 11 月 25 日 (月)	2 回目	(~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名			
試験 時間	90 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★空欄補充以外の解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

$$[1] \frac{x^3 + 9x^2 + 7x + 15}{x(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 2x + 3}$$

が常に成り立つとき

$$A = \boxed{5}, B = \boxed{-3}, C = \boxed{0},$$

$$D = \boxed{-2}, E = \boxed{-3}$$

である。空欄を埋めて、次の積分を求めよ。

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^3 + 9x^2 + 7x + 15}{x(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)} dx \\ &= \int \left(\frac{5}{x} - \frac{3x}{x^2 + 1} - \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 3} \right) dx \\ &= \int \left\{ \frac{5}{x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{(2x + 2) + 1}{x^2 + 2x + 3} \right\} dx \\ &= \int \left\{ \frac{5}{x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2 + (x + 1)^2} \right\} dx \\ &= 5 \log|x| - \frac{3}{2} \log(x^2 + 1) - \log(x^2 + 2x + 3) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

[2] 次の積分を、カッコ内の置換により求めよ。答えは、 t についての積分を実行したところまででよいことにする (x の式にもどさなくてもよいことにする)。

$$\begin{aligned} (1) & \int \frac{6 \sin x + 5 \cos x - 5}{\sin x (3 \sin x - \cos x + 1)} dx \quad \left(\tan \frac{x}{2} = t \right) \\ &= \int \frac{6 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} - 5}{\frac{2t}{1+t^2} \left(3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 \right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{-5t + 6}{t(t+3)} dt \\ &= \int \left(\frac{2}{t} - \frac{7}{t+3} \right) dt \\ &= 2 \log|t| - 7 \log|t+3| \end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{1}{x\sqrt{5x^2 + 7x - 9}} dx \quad (\sqrt{5x^2 + 7x - 9} + \sqrt{5}x = t)$$

$$\sqrt{5x^2 + 7x - 9} + \sqrt{5}x = t \text{ とおく} \Rightarrow \sqrt{5x^2 + 7x - 9} = t - \sqrt{5}x$$

両辺を2乗すると

$$5x^2 + 7x - 9 = t^2 - 2\sqrt{5}tx + 5x^2 \quad \therefore x = \frac{t^2 + 9}{2\sqrt{5}t + 7}$$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot (2\sqrt{5}t + 7) - (t^2 + 9) \cdot 2\sqrt{5}}{(2\sqrt{5}t + 7)^2} = \frac{2(\sqrt{5}t^2 + 7t - 9\sqrt{5})}{(2\sqrt{5}t + 7)^2}$$

さらに

$$\sqrt{5x^2 + 7x - 9} = t - \sqrt{5} \cdot \frac{t^2 + 9}{2\sqrt{5}t + 7} = \frac{\sqrt{5}t^2 + 7t - 9\sqrt{5}}{2\sqrt{5}t + 7}$$

よって

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x\sqrt{5x^2 + 7x - 9}} dx \\ &= \int \frac{1}{\frac{t^2 + 9}{2\sqrt{5}t + 7} \cdot \frac{\sqrt{5}t^2 + 7t - 9\sqrt{5}}{2\sqrt{5}t + 7}} \cdot \frac{2(\sqrt{5}t^2 + 7t - 9\sqrt{5})}{(2\sqrt{5}t + 7)^2} dt \\ &= \int \frac{2}{t^2 + 9} dt \\ &= \int \frac{2}{3^2 + t^2} dt \\ &= \frac{2}{3} \arctan \frac{t}{3} \end{aligned}$$