

科目名	微積分学	対象	10B-B	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 25 年 11 月 18 日 (月)	1 回目	(~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名			
試験 時間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★空欄補充以外の解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

$$[1] \frac{-4x^2 - 5x + 8}{x(x+1)^2(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+4}$$

が常に成り立つとき

$$A = \boxed{2}, B = \boxed{-4}, C = \boxed{-3},$$

$$D = \boxed{2}, E = \boxed{3}$$

である。空欄を埋めて、次の積分を求めよ。

$$\begin{aligned} & \int \frac{-4x^2 - 5x + 8}{x(x+1)^2(x^2+2x+4)} dx \\ &= \int \left\{ \frac{2}{x} - \frac{4}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2x+3}{x^2+2x+4} \right\} dx \\ &= \int \left\{ \frac{2}{x} - \frac{4}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{(2x+2)+1}{x^2+2x+4} \right\} dx \\ &= \int \left\{ \frac{2}{x} - \frac{4}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2x+2}{x^2+2x+4} + \frac{1}{(\sqrt{3})^2+(x+1)^2} \right\} dx \\ &= 2 \log|x| - 4 \log|x+1| + \frac{3}{x+1} \\ &\quad + \log(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

[2] 次の積分を、カッコ内の置換により求めよ。答えは、 t についての積分を実行したところまででよいことにする (x の式にもどさなくてもよいことにする)。

$$\begin{aligned} (1) & \int \frac{\sin x + 3 \cos x + 3}{\sin x (\sin x + \cos x + 1)} dx \quad \left(\tan \frac{x}{2} = t \right) \\ &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3}{\frac{2t}{1+t^2} \left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 \right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{t+3}{t(t+1)} dt \\ &= \int \left(\frac{3}{t} - \frac{2}{t+1} \right) dt \\ &= 3 \log|t| - 2 \log|t+1| \end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{1}{x\sqrt{3x^2+8x-4}} dx \quad (\sqrt{3x^2+8x-4} + \sqrt{3}x = t)$$

$$\sqrt{3x^2+8x-4} + \sqrt{3}x = t \text{ とおくと } \sqrt{3x^2+8x-4} = t - \sqrt{3}x$$

両辺 2 乗すると

$$3x^2+8x-4 = t^2 - 2\sqrt{3}tx + 3x^2 \quad \therefore x = \frac{t^2+4}{2\sqrt{3}t+8}$$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot (2\sqrt{3}t+8) - (t^2+4) \cdot 2\sqrt{3}}{(2\sqrt{3}t+8)^2} = \frac{2(\sqrt{3}t^2+8t-4\sqrt{3})}{(2\sqrt{3}t+8)^2}$$

さらに

$$\sqrt{3x^2+8x-4} = t - \sqrt{3} \cdot \frac{t^2+4}{2\sqrt{3}t+8} = \frac{\sqrt{3}t^2+8t-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}t+8}$$

よって

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x\sqrt{3x^2+8x-4}} dx \\ &= \int \frac{1}{\frac{t^2+4}{2\sqrt{3}t+8} \cdot \frac{\sqrt{3}t^2+8t-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}t+8}} \cdot \frac{2(\sqrt{3}t^2+8t-4\sqrt{3})}{(2\sqrt{3}t+8)^2} dt \\ &= \int \frac{2}{t^2+4} dt \\ &= \int \frac{2}{2^2+t^2} dt \\ &= \arctan \frac{t}{2} \end{aligned}$$