

科目名	微積分学	対象	1OB-AB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評 点
平成 26 年 1 月 27 日 (月) 2 回目 (~ 時限目)				担当	石川 学	学 年		氏 名		
試験 時間	60 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 2. 下記のみ参照 持込可 ()							

平成 25 年度後期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

- 1

$f(x,y) = \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{3}y^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 2xy$ について、次の問いに答えよ.
- (1)

$f(x,y)$ の停留点を求めよ.
- (2)

$f(x,y)$ の極値を求めよ.
- (3)

$x^3 + y^3 - xy = 1$ に制限した $f(x,y)$ が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ.
- 2

次の積分を求めよ.
- (1)

$\int_{-2}^1 \left\{ \int_{x-1}^{x^2} (7y - x) dy \right\} dx$
- (2)

$\int_1^2 \left(\int_1^x \frac{x^2}{y} dy \right) dx$
- (3)

$\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 e^{-\frac{y^3}{4}} dy \right) dx$ (順序変更)
- (4)

$\int \int_D \frac{y^3}{x^2} dx dy$ ($D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -x \leq y \leq \sqrt{3}x$)
- (5)

$\int \int_D (9x - 5y) dx dy$ ($D : x \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$)

科目名		担当	先生
学籍番号	学部	学科	番
			H25KT

--

①

$$f(x, y) = \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{3}y^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 2xy$$

$$(1) \begin{cases} f_x = 5x^2 + 3x + 2y = 0 & \text{--- ①} \\ f_y = 5y^2 + 3y + 2x = 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ より } 5(x-y)(x+y) + (x-y) = 0$$

$$(x-y)\{5(x+y) + 1\} = 0 \quad \therefore x=y \text{ or } x+y = -\frac{1}{5}$$

$$(i) x=y \text{ のとき, ① より } 5x^2 + 5x = 0$$

$$5x(x+1) = 0 \quad \therefore x = 0, -1$$

$$(ii) x+y = -\frac{1}{5} \text{ のとき, ①} + \text{② より}$$

$$5\{(x+y)^2 - 2xy\} + 5(x+y) = 0$$

$$5\left(\frac{1}{25} - 2xy\right) - 1 = 0 \quad \therefore xy = -\frac{2}{25}$$

よって, x, y は t の 2 次方程式 $t^2 + \frac{1}{5}t - \frac{2}{25} = 0$ の解である。
実際には解く

$$25t^2 + 5t - 2 = 0$$

$$(5t-1)(5t+2) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}$$

以上 (i), (ii) より, 停留点は

$$(0, 0), (-1, -1), \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right), \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

$$(2) f_{xx} = 10x + 3, f_{yy} = 10y + 3, f_{xy} = 2$$

$$H = (10x+3)(10y+3) - 2^2$$

$$\cdot H(0, 0) = 3 \cdot 3 - 2^2 = 5 > 0, f_{xx}(0, 0) = 3 > 0$$

$$\therefore f(0, 0) = 0 : \text{極小値}$$

$$\cdot H(-1, -1) = (-7) \cdot (-7) - 2^2 = 45 > 0, f_{xx}(-1, -1) = -7 < 0$$

$$\therefore f(-1, -1) = \frac{5}{3} : \text{極大値}$$

$$\cdot H\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right) = 5 \cdot (-1) - 2^2 = -9 < 0$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right) : \text{極値ではない}$$

$$\cdot H\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) = (-1) \cdot 5 - 2^2 = -9 < 0$$

$$\therefore f\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) : \text{極値ではない}$$

$$(3) g(x, y) = x^3 + y^3 - xy - 1, \Gamma: g(x, y) = 0 \text{ とおく}$$

$$g_y = 3y^2 - x \text{ であるから, } g(1, 1) = 0, g_y(1, 1) = 2 \neq 0 \text{ である}$$

よって, 陰関数定理より点 $(1, 1)$ のある近傍 D 内では

y は x の C^∞ 級関数 $y = \varphi(x)$ と表す

$$\varphi(1) = 1, x^3 + \varphi(x)^3 - x\varphi(x) = 1 \quad \text{--- ③}$$

とみたす。

③ の両辺を x で微分して

$$3x^2 + 3\varphi^2 \cdot \varphi' - 1 \cdot \varphi - x \cdot \varphi' = 0$$

$$3x^2 + 3\varphi^2 \varphi' - \varphi - x\varphi' = 0 \quad \text{--- ④}$$

$x=1$ を代入して

$$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 \cdot \varphi'(1) - 1 - 1 \cdot \varphi'(1) = 0 \quad \therefore \varphi'(1) = -1$$

④ の両辺を x で微分して

$$6x + (6\varphi \cdot \varphi') \cdot \varphi' + 3\varphi^2 \cdot \varphi'' - \varphi' - 1 \cdot \varphi' - x \cdot \varphi'' = 0$$

$$6x + 6\varphi(\varphi')^2 + 3\varphi^2 \varphi'' - 2\varphi' - x\varphi'' = 0$$

$x=1$ を代入して

$$6 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 1^2 \cdot \varphi''(1) - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot \varphi''(1) = 0$$

$$\therefore \varphi''(1) = -7$$

$\pm 2, D$ 内では

$$f|_D(x, y) = f(x, \varphi(x))$$

$$= \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{3}\varphi(x)^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}\varphi(x)^2 + 2x\varphi(x)$$

$$= \frac{5}{3}\{x^3 + \varphi(x)^3\} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}\varphi(x)^2 + 2x\varphi(x)$$

$$= \frac{5}{3}\{x\varphi(x) + 1\} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}\varphi(x)^2 + 2x\varphi(x)$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}\varphi(x)^2 + \frac{11}{3}x\varphi(x) + \frac{5}{3}$$

と表すから, これを $F(x)$ とおき, $F(x)$ が $x=1$ で極値をとるかどうかが問題となる。

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}\varphi^2 + \frac{11}{3}x\varphi + \frac{5}{3}$$

$$F'(x) = 3x + 3\varphi \cdot \varphi' + \frac{11}{3} \cdot \varphi + \frac{11}{3}x \cdot \varphi'$$

よって

$$F'(1) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) + \frac{11}{3} \cdot 1 + \frac{11}{3} \cdot 1 \cdot (-1) = 0$$

また

$$F''(x) = 3 + 3\varphi' \cdot \varphi' + 3\varphi \cdot \varphi'' + \frac{11}{3}\varphi' + \frac{11}{3} \cdot \varphi' + \frac{11}{3}x \cdot \varphi''$$

$$= 3 + 3(\varphi')^2 + 3\varphi\varphi'' + \frac{22}{3}\varphi' + \frac{11}{3}x\varphi''$$

よって

$$F''(1) = 3 + 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 1 \cdot (-7) + \frac{22}{3} \cdot (-1) + \frac{11}{3} \cdot 1 \cdot (-7)$$

$$= -48 < 0$$

$$\therefore F(1) = \frac{25}{3} : \text{極大値}$$

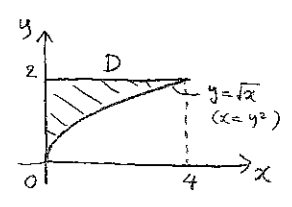
2

$$\begin{aligned}
 (1) & \int_{-2}^1 \left\{ \int_{x-1}^{x^2} (7y-x) dy \right\} dx \\
 &= \int_{-2}^1 \left[\frac{7}{2} y^2 - xy \right]_{y=x-1}^{y=x^2} dx \\
 &= \int_{-2}^1 \left\{ \frac{7}{2} \{x^4 - (x-1)^2\} - x \{x^2 - (x-1)\} \right\} dx \\
 &= \int_{-2}^1 \left\{ \frac{7}{2} x^4 - \frac{7}{2} (x-1)^2 - x^3 + x^2 - x \right\} dx \\
 &= \left[\frac{7}{10} x^5 - \frac{7}{6} (x-1)^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 \\
 &= \frac{7}{10} \{1 - (-32)\} - \frac{7}{6} \{0 - (-27)\} - \frac{1}{4} (1-16) + \frac{1}{3} \{1 - (-8)\} - \frac{1}{2} (1-4) \\
 &= -\frac{3}{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \int_1^2 \left(\int_1^x \frac{x^2}{y} dy \right) dx \\
 &= \int_1^2 [x^2 \log y]_{y=1}^{y=x} dx \\
 &= \int_1^2 x^2 (\log x - 0) dx \\
 &= \int_1^2 x^2 \log x dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} \right]_1^2 \\
 &= \frac{1}{3} (8 \log 2 - 1 \cdot 0) - \frac{1}{9} (8 - 1) \\
 &= \frac{8}{3} \log 2 - \frac{7}{9}
 \end{aligned}$$

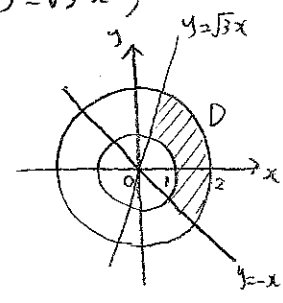
$$\log x \otimes \frac{x^3}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 e^{-\frac{y^3}{4}} dy \right) dx \\
 & \left(\begin{array}{l} \text{積分領域は} \\ D: 0 \leq x \leq 4, \sqrt{x} \leq y \leq 2 \\ \text{とあるが, 正しくは} \\ D: 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y^2 \\ \text{とあるから} \end{array} \right) \\
 &= \int_0^2 \left(\int_0^{y^2} e^{-\frac{y^3}{4}} dx \right) dy \\
 &= \int_0^2 [x e^{-\frac{y^3}{4}}]_{x=0}^{x=y^2} dy \\
 &= \int_0^2 y^2 e^{-\frac{y^3}{4}} dy \\
 &= -\frac{4}{3} \int_0^2 e^{-\frac{y^3}{4}} \cdot \left(-\frac{3}{4} y^2\right) dy \\
 &= -\frac{4}{3} [e^{-\frac{y^3}{4}}]_0^2 \\
 &= -\frac{4}{3} (e^{-2} - 1) \\
 &= \frac{4}{3} (1 - \frac{1}{e^2})
 \end{aligned}$$



$$(4), (5) \text{ は } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} r \geq 0 \\ \theta = 1 \text{ 周} / 分 \end{array} \right) \text{ とする.}$$

$$\begin{aligned}
 (4) & \iint_D \frac{y^3}{x^2} dx dy \quad (D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -x \leq y \leq \sqrt{3}x) \\
 &= \iint_{D'} \frac{r^3 \sin^3 \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \cdot r dr d\theta \quad (D': 1 \leq r \leq 2, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}) \\
 &= \iint_{D'} r^2 \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} dr d\theta \\
 &= \int_1^2 r^2 dr \times \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 - \cos^2 \theta) \sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \times \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \sin \theta \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{3} (8 - 1) \times \left[\frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{7}{3} \left\{ (2 - \sqrt{2}) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\
 &= \frac{7}{3} \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \right) = \frac{35}{6} - \frac{7}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (5) & \iint_D (9x - 5y) dx dy \quad (D: x \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0) \\
 &= \iint_{D'} (9r \cos \theta - 5r \sin \theta) \cdot r dr d\theta \quad (D': 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \cos \theta \leq r \leq 1) \\
 &= \iint_{D'} r^2 (9 \cos \theta - 5 \sin \theta) dr d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{\cos \theta}^1 r^2 (9 \cos \theta - 5 \sin \theta) dr \right\} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} (9 \cos \theta - 5 \sin \theta) \right]_{r=\cos \theta}^{r=1} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} (1 - \cos^3 \theta) (9 \cos \theta - 5 \sin \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ 9 \cos \theta - 5 \sin \theta - 9 \cos^4 \theta - 5 \cos^3 \theta \cdot (-\sin \theta) \} d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \left(9 \cdot 1 - 5 \cdot 1 - 9 \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} - \left[\frac{5}{4} \cos^4 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ 4 - \frac{27}{16} \pi - \frac{5}{4} (0 - 1) \right\} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{21}{4} - \frac{27}{16} \pi \right) \\
 &= \frac{7}{4} - \frac{9}{16} \pi
 \end{aligned}$$

