

科目名	微積分学演習	対 象	1OB-A	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 26 年 5 月 28 日 (水) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	45 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照持込可 (裏面使用可)							

1 次の集合 A に対して, $\sup A$ と $\inf A$ を求めよ. この問題は答えのみ採点する.

(1) $A = \left\{ \frac{4n+9}{n+2} + (-1)^n \cdot \frac{n+4}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

(2) $A = \left\{ \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

2 次の数列 $\{a_n\}$ の極限值を求めよ. この問題は結論に至る過程も採点する.

(1) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!n^{3n}}{n!(4n)!}} \quad (n \in \mathbb{N})$

(2) $a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{a_n^2 - a_n + 15}{7} \quad (n \in \mathbb{N})$

科目名	微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 26 年 5 月 28 日 (水)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	45 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照持込可 (裏面使用可)							

1 次の集合 A に対して, $\sup A$ と $\inf A$ を求めよ. この問題は答えのみ採点する.

$$(1) A = \left\{ \frac{4n+9}{n+2} + (-1)^n \cdot \frac{n+4}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad (2) A = \left\{ \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(i) a_m = \frac{4m+9}{m+2} + (-1)^m \cdot \frac{m+4}{m+3} \quad (m \in \mathbb{N}) \text{ とおき, } m \in \mathbb{N} \text{ とする.}$$

$$(i) a_{2m-1} = \frac{8m+5}{2m+1} - \frac{2m+3}{2m+2} = \frac{4(2m+1)+1}{2m+1} - \frac{(2m+2)+1}{2m+2}$$

$$= 4 + \frac{1}{2m+1} - 1 - \frac{1}{2m+2} = 3 + \frac{1}{(2m+1)(2m+2)}$$

$$\text{だから } 3 < a_{2m-1} \leq \frac{37}{12} \quad (\text{等号: } m=1)$$

$$(ii) a_{2m} = \frac{8m+9}{2m+2} + \frac{2m+4}{2m+3} = \frac{4(2m+2)+1}{2m+2} + \frac{(2m+3)+1}{2m+3}$$

$$= 4 + \frac{1}{2m+2} + 1 + \frac{1}{2m+3} = 5 + \frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m+3}$$

$$\text{だから } 5 < a_{2m} \leq \frac{109}{20} \quad (\text{等号: } m=1)$$

以上 (i) (ii) より

$$3 < a_m \leq \frac{109}{20} \quad (\text{等号: } m=2)$$

$$\therefore \max A = \frac{109}{20} \text{ だから } \sup A = \frac{109}{20}$$

$$\cdot 3 \text{ は } A \text{ の下界で, } \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} \right\} = 3$$

$$\text{だから } \inf A = 3$$

$$(2) f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}} \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = \frac{3-x}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}} \text{ だから増減表は}$$

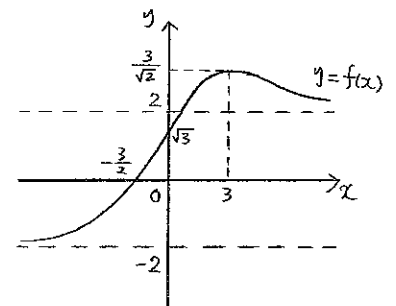
x	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\searrow$

また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

だから、グラフは図のようになる。

$$\therefore \sup A = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \inf A = -2$$



2 次の数列 $\{a_n\}$ の極限值を求めよ. この問題は結論に至る過程も採点する.

$$(1) a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!n^{3n}}{n!(4n)!}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(2) a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 - a_n + 15}{7} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(1) b_m = \frac{(2m)! m^{3m}}{m!(4m)!} \quad (m \in \mathbb{N}) \text{ とおくと, } b_m > 0 \text{ で}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_{m+1}}{b_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2m+2)!(m+1)^{3m+3}}{(m+1)!(4m+4)!} \cdot \frac{m!(4m)!}{(2m)! m^{3m}}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2m+1)(2m+2)(m+1)^3}{(m+1)(4m+1)(4m+2)(4m+3)(4m+4)} \left(\frac{m+1}{m} \right)^{3m}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{1}{m})^2}{4(4+\frac{1}{m})(4+\frac{3}{m})} \left\{ \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \right\}^3$$

$$= \frac{e^3}{64}$$

$$\therefore \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{b_m} = \frac{e^3}{64}$$

(2) まず, $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$3 < a_m \leq 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す.

(i) $a_1 = 4$ より, $m=1$ のとき $\textcircled{1}$ は成り立つ.

(ii) $m=k$ ($k \in \mathbb{N}$) のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると

$$3 < a_k \leq 4$$

このとき,

$$a_{k+1} - 4 = \frac{a_k^2 - a_k + 15}{7} - 4 = \frac{a_k^2 - a_k - 13}{7}$$

$$= \frac{a_k(a_k - 1) - 13}{7} \leq \frac{4 \cdot 3 - 13}{7} < 0$$

$$a_{k+1} - 3 = \frac{a_k^2 - a_k + 15}{7} - 3 = \frac{a_k^2 - a_k - 6}{7}$$

$$= \frac{(a_k+2)(a_k-3)}{7} > 0$$

より $3 < a_{k+1} < 4$ とおけるから, $m=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ が成り立つ.

以上 (i), (ii) より, $m \in \mathbb{N}$ に対して $\textcircled{1}$ が成り立つ.

これより, $\{a_m\}$ は有界であることがわかり, さらに

$$a_{m+1} - a_m = \frac{a_m^2 - a_m + 15}{7} - a_m = \frac{a_m^2 - 8a_m + 15}{7} = \frac{(a_m-3)(a_m-5)}{7} < 0$$

より $a_{m+1} < a_m$, すなわち, $\{a_m\}$ は単調減少であることがわかる.

よって $\{a_m\}$ は収束する. そこで, 極限値を a とすると, $\textcircled{1}$ より

$3 \leq a \leq 4 \dots \textcircled{2}$ であり, 漸化式で $m \rightarrow \infty$ とすると

$$a = \frac{a^2 - a + 15}{7}$$

$$a^2 - 8a + 15 = 0$$

$$(a-3)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 3 \quad (\textcircled{2} \text{ より})$$

$$\text{以上より } \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 3$$

※ $\textcircled{1}$ を示したあと

$$0 < a_{m+1} - 3 = \frac{(a_m+2)(a_m-3)}{7} \leq \frac{6}{7}(a_m-3)$$

を導き, これをくり返し用いると

$$0 < a_m - 3 \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{m-1} (a_1 - 3) \quad \therefore 0 < a_m - 3 \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{m-1}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{7}\right)^{m-1} = 0 \text{ だから, はさみうちの原理より } \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 3$$