

科目名	微積分学演習	対 象	1OB-A	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 26 年 7 月 9 日 (水) 2 回目 (~ 時限目)			担 当	石川 学		学 年		氏 名		
試 験 時 間	50 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照 持込可 (裏面使用可)							

- 1 $\mathbb{R}$ で無限回微分可能な関数 f が
- $$f(0) = 1, \quad (1+x^2)f'(x) = (1+x)f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$
- を満たすとする. 解答スペースがなくなったら裏面を使用してよい.
- (1) $n \geq 2$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を $n, f^{(n-1)}(0), f^{(n-2)}(0)$ を用いて表せ.
- (2) $f^{(2)}(0), f^{(3)}(0), f^{(4)}(0), f^{(5)}(0), f^{(6)}(0)$ を求めよ.

- 2 次の極限值を求めよ. この問題は裏面に解答せよ.
- $$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{3x + \log(1 - 3x)}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^6}{\sin^8 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$
- $$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{x \tan 2x}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)\sqrt{1-x} - x}{x^3}$$

科目名	微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 26 年 7 月 9 日 (水)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	50 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 千記のみ参照・持込可 (裏面使用可)							

1 $\mathbb{R}$ で無限回微分可能な関数 f が

$$f(0) = 1, \quad (1+x^2)f'(x) = (1+x)f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たすとする。解答スペースがなくなったら裏面を使用してよい。

(1) $n \geq 2$ に対して、 $f^{(n)}(0)$ を $n, f^{(n-1)}(0), f^{(n-2)}(0)$ を用いて表せ。

(2) $f^{(2)}(0), f^{(3)}(0), f^{(4)}(0), f^{(5)}(0), f^{(6)}(0)$ を求めよ。

(1) $(1+x^2)f'(x) = (1+x)f(x)$ の両辺を $n (\geq 2)$ 回微分すると、Leibniz の公式より

$$\sum_{k=0}^n n C_k (1+x^2)^{(k)} \{f'(x)\}^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n n C_k (1+x)^{(k)} \{f(x)\}^{(n-k)}$$

$$1 \cdot (1+x^2) \cdot f^{(n+1)}(x) + n \cdot 2x \cdot f^{(n)}(x) + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot f^{(n-1)}(x)}_{(n=1 \text{ とするとき } 0)} = 1 \cdot (1+x) \cdot f^{(n)}(x) + n \cdot 1 \cdot f^{(n-1)}(x) \quad (n=1 \text{ とするとき } 0)$$

$$\therefore (1+x^2)f^{(n+1)}(x) + \{2n-1\}x f^{(n)}(x) + n(n-2)f^{(n-1)}(x) = 0 \quad (n \geq 1)$$

$x=0$ と代入すると

$$f^{(n+1)}(0) - f^{(n)}(0) + n(n-2)f^{(n-1)}(0) = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$\therefore f^{(n)}(0) = f^{(n-1)}(0) - (n-1)(n-3)f^{(n-2)}(0) \quad (n \geq 2)$$

$$(2) f^{(0)}(0) = f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{(1+x)f(x)}{1+x^2} \quad \text{より} \quad f^{(1)}(0) = f'(0) = f(0) = 1$$

これから (1) で導いた漸化式より

$$f^{(2)}(0) = f^{(1)}(0) - 1 \cdot (-1) \cdot f^{(0)}(0) = 1 + 1 = 2$$

$$f^{(3)}(0) = f^{(2)}(0) - 2 \cdot 0 \cdot f^{(1)}(0) = 2 - 0 = 2$$

$$f^{(4)}(0) = f^{(3)}(0) - 3 \cdot 1 \cdot f^{(2)}(0) = 2 - 6 = -4$$

$$f^{(5)}(0) = f^{(4)}(0) - 4 \cdot 2 \cdot f^{(3)}(0) = -4 - 16 = -20$$

$$f^{(6)}(0) = f^{(5)}(0) - 5 \cdot 3 \cdot f^{(4)}(0) = -20 + 60 = 40$$

2 次の極限值を求めよ。この問題は裏面に解答せよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{3x + \log(1-3x)} = -\frac{16}{9}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^6}{\sin^8 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{4}{3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{x \tan 2x}} = e^{-\frac{25}{4}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)\sqrt{1-x} - x}{x^3} = -\frac{5}{24}$$