

科目名	微積分学演習	対 象	1OB-A	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 26 年 11 月 12 日 (水) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	80 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 2. 下記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
★空欄補充以外の解答はすべて記述式とし、答えのみは正解と
しません。

① $\frac{8x^2 + 5x + 12}{x^3(x^2 + 2x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 + 2x + 3}$

が常に成り立つとき

$A = \square, B = \square, C = \square,$

$D = \square, E = \square$

である。空欄を埋めて、次の積分を求めよ。

$\int \frac{8x^2 + 5x + 12}{x^3(x^2 + 2x + 3)} dx$

② 次の積分を、カッコ内の置換により求めよ。答えは、 t につ
いての積分を実行したところまででよいことにする (x の式に
もどさなくてもよいことにする)。

(1) $\int \frac{2 \cos x + 2}{(2 \sin x + \cos x + 3)(\sin x + 2)} dx \quad \left(\tan \frac{x}{2} = t \right)$

(2) $\int \frac{1}{x \sqrt{5x^2 - 7x + 9}} dx \quad \left(\sqrt{5x^2 - 7x + 9} + \sqrt{5}x = t \right)$

□3 次の広義積分を求めよ.

(1) $\int_2^{\infty} x e^{-2x} dx$

(2) $\int_0^3 \frac{\log x}{(x+3)^2} dx$

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\infty} \frac{\arctan x}{x^3} dx$

科目名	微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 26 年 11 月 12 日 (水)	2 回目	(~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名			
試験 時間	80 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみに参照 持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
 ★空欄補充以外の解答はすべて記述式とし、答えのみは正解と
 しません。

$$1 \quad \frac{8x^2 + 5x + 12}{x^3(x^2 + 2x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 + 2x + 3}$$

が常に成り立つとき

$$A = \boxed{2}, B = \boxed{-1}, C = \boxed{4},$$

$$D = \boxed{-2}, E = \boxed{-3}$$

である。空欄を埋めて、次の積分を求めよ。

$$\begin{aligned} & \int \frac{8x^2 + 5x + 12}{x^3(x^2 + 2x + 3)} dx \\ &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{-2x - 3}{x^2 + 2x + 3} \right) dx \\ &= \int \left\{ \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{-(2x+2) - 1}{x^2 + 2x + 3} \right\} dx \\ &= \int \left\{ \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 3} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2 + (x+1)^2} \right\} dx \\ &= 2 \log|x| + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \log(x^2 + 2x + 3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

2 次の積分を、カッコ内の置換により求めよ。答えは、 t に
 いての積分を実行したところまででよいことにする (x の式に
 もどさなくてもよいことにする)。

$$(1) \int \frac{2 \cos x + 2}{(2 \sin x + \cos x + 3)(\sin x + 2)} dx \quad \left(\tan \frac{x}{2} = t \right)$$

$$\tan \frac{x}{2} = t \quad \text{とあくと}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

であるから

$$\begin{aligned} & \int \frac{2 \cos x + 2}{(2 \sin x + \cos x + 3)(\sin x + 2)} dx \\ &= \int \frac{2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2}{\left(2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \right) \left(\frac{2t}{1+t^2} + 2 \right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2}{(t^2 + 2t + 2)(t^2 + t + 1)} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int \left(\frac{2t+2}{t^2+2t+2} - \frac{2t}{t^2+t+1} \right) dt \\ &= \int \left\{ \frac{2t+2}{t^2+2t+2} - \frac{(2t+1)-1}{t^2+t+1} \right\} dt \\ &= \int \left\{ \frac{2t+2}{t^2+2t+2} - \frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(t+\frac{1}{2}\right)^2} \right\} dt \\ &= \log(t^2+2t+2) - \log(t^2+t+1) + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \log(t^2+2t+2) - \log(t^2+t+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\times \quad \frac{2}{(t^2+2t+2)(t^2+t+1)} = \frac{At+B}{t^2+2t+2} + \frac{Ct+D}{t^2+t+1}$$

と設定すると $A=2, B=2, C=-2, D=2$ とあう。

$$(2) \int \frac{1}{x\sqrt{5x^2-7x+9}} dx \quad \left(\sqrt{5x^2-7x+9} + \sqrt{5}x = t \right)$$

$$\sqrt{5x^2-7x+9} + \sqrt{5}x = t \quad \text{とあくと}$$

$$\sqrt{5x^2-7x+9} = t - \sqrt{5}x$$

$$5x^2-7x+9 = t^2 - 2\sqrt{5}tx + 5x^2$$

$$\therefore x = \frac{t^2-9}{2\sqrt{5}t-7}$$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot (2\sqrt{5}t-7) - (t^2-9) \cdot 2\sqrt{5}}{(2\sqrt{5}t-7)^2} = \frac{2(\sqrt{5}t^2-7t+9\sqrt{5})}{(2\sqrt{5}t-7)^2}$$

さらに

$$\sqrt{5x^2-7x+9} = t - \sqrt{5}x = t - \sqrt{5} \cdot \frac{t^2-9}{2\sqrt{5}t-7} = \frac{\sqrt{5}t^2-7t+9\sqrt{5}}{2\sqrt{5}t-7}$$

よって

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x\sqrt{5x^2-7x+9}} dx \\ &= \int \frac{1}{\frac{t^2-9}{2\sqrt{5}t-7} \cdot \frac{\sqrt{5}t^2-7t+9\sqrt{5}}{2\sqrt{5}t-7}} \cdot \frac{2(\sqrt{5}t^2-7t+9\sqrt{5})}{(2\sqrt{5}t-7)^2} dt \\ &= \int \frac{2}{t^2-9} dt \\ &= \int \frac{2}{(t-3)(t+3)} dt \\ &= \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} (\log|t-3| - \log|t+3|) \end{aligned}$$

3 次の広義積分を求めよ。

(1) $\int_2^{\infty} x e^{-2x} dx$

$$x \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int x e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} x e^{-2x} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R x e^{-2x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]_2^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2} (R e^{-2R} - 2 e^{-4}) - \frac{1}{4} (e^{-2R} - e^{-4}) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} (0 - 2 e^{-4}) - \frac{1}{4} (0 - e^{-4}) \\ &= \frac{5}{4} e^{-4} \end{aligned}$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} \ominus \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 e^{2x}} = 0$$

(2) $\int_0^3 \frac{\log x}{(x+3)^2} dx$

$$\log x \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} -\frac{1}{x+3} \\ \frac{1}{(x+3)^2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{(x+3)^2} dx &= -\frac{\log x}{x+3} + \int \frac{1}{x(x+3)} dx \\ &= -\frac{\log x}{x+3} + \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) dx \\ &= -\frac{\log x}{x+3} + \frac{1}{3} \{ \log x - \log(x+3) \} \\ &= \frac{x \log x}{3(x+3)} - \frac{1}{3} \log(x+3) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{\log x}{(x+3)^2} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^3 \frac{\log x}{(x+3)^2} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{x \log x}{3(x+3)} - \frac{1}{3} \log(x+3) \right]_{\varepsilon}^3 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{3 \log 3}{6} - \frac{\varepsilon \log \varepsilon}{\varepsilon+3} \right) - \frac{1}{3} \{ \log 6 - \log(\varepsilon+3) \} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \log 3 - 0 \right) - \frac{1}{3} (\log 6 - \log 3) \\ &= \frac{1}{6} \log 3 - \frac{1}{3} \log 2 \end{aligned}$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \ominus \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\infty} \frac{\arctan x}{x^3} dx$

$$\arctan x \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} -\frac{1}{2x^2} \\ \frac{1}{x^3} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan x}{x^3} dx &= -\frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx \\ &= -\frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= -\frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} - \arctan x \right) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\infty} \frac{\arctan x}{x^3} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^R \frac{\arctan x}{x^3} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{\arctan x}{2x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \arctan x \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\arctan R}{R^2} - \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{3}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} - \sqrt{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\arctan R - \frac{\pi}{6} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left(0 - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} (0 - \sqrt{3}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$