

科目名	微積分学演習	対 象	1OB-A	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 26 年 12 月 10 日 (水) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	50 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 2. 下記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.
★空欄補充以外の解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません.

① (1) $\tan \frac{x}{2} = t$ とおくことにより, $\int \frac{3(\cos x + 1)}{\cos x(\sin x + 2)} dx$ を求めよ. 答えは, t についての積分を実行したところまででよいことにする (x の式にもどさなくてもよいことにする).

(2) $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{\log(x^2 + 6)}{x^4} dx$ を求めよ.

□2 $f(x, y) = y^3 + x^2y - \frac{2}{3}x^2 - y^2 - 3xy + 2x + \frac{5}{4}y$ について,
次の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ.

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

※ $f(x, y) : C^2$ 級で, $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) : \text{極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極大値}$

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする.

※物理数学の $D(x, y) = f_{xy}(x, y)^2 - f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y)$ を用いてもよい.

科目名	微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評 点
平成 26 年 12 月 10 日 (水)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	50 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
 ★空欄補充以外の解答はすべて記述式とし、答えのみは正解と
 しません。

① (1) $\tan \frac{x}{2} = t$ とおくことにより、 $\int \frac{3(\cos x + 1)}{\cos x (\sin x + 2)} dx$ を
 求めよ。答えは、 t についての積分を実行したところまででよ
 いことにする (x の式にもどさなくてもよいことにする)。

$$\tan \frac{x}{2} = t \text{ とおく}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{3(\cos x + 1)}{\cos x (\sin x + 2)} dx \\
 &= \int \frac{3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right)}{\frac{1-t^2}{1+t^2} \left(\frac{2t}{1+t^2} + 2\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\
 &= \int \frac{6}{(1-t^2)(t^2+t+1)} dt \\
 &= \int \frac{-6}{(t-1)(t+1)(t^2+t+1)} dt \\
 &= \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{3}{t+1} + \frac{-2t+2}{t^2+t+1} \right) dt \\
 &= \int \left\{ -\frac{1}{t-1} + \frac{3}{t+1} + \frac{-(2t+1)+3}{t^2+t+1} \right\} dt \\
 &= \int \left\{ -\frac{1}{t-1} + \frac{3}{t+1} - \frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{3}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(t+\frac{1}{2}\right)^2} \right\} dt \\
 &= -\log|t-1| + 3\log|t+1| - \log(t^2+t+1) + \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
 &= -\log|t-1| + 3\log|t+1| - \log(t^2+t+1) + 2\sqrt{3} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$* \frac{-6}{(t-1)(t+1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+t+1}$$

と設定すると $A = -1, B = 3, C = -2, D = 2$ となる。

$$(2) \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{\log(x^2+6)}{x^4} dx \text{ を求めよ。}$$

$$\frac{\log(x^2+6)}{x^2+6} \begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ -\frac{1}{3x^3} & \frac{1}{x^4} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\log(x^2+6)}{x^4} dx &= -\frac{\log(x^2+6)}{3x^3} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2(x^2+6)} dx \\
 &= -\frac{\log(x^2+6)}{3x^3} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+6} \right) dx \\
 &= -\frac{\log(x^2+6)}{3x^3} + \frac{1}{9} \int \left\{ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\sqrt{6})^2 + x^2} \right\} dx \\
 &= -\frac{\log(x^2+6)}{3x^3} + \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \frac{x}{\sqrt{6}} \right)
 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 & \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{\log(x^2+6)}{x^4} dx \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sqrt{2}}^R \frac{\log(x^2+6)}{x^4} dx \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{\log(x^2+6)}{3x^3} - \frac{1}{9x} - \frac{1}{9\sqrt{6}} \arctan \frac{x}{\sqrt{6}} \right]_{\sqrt{2}}^R \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{3} \left\{ \frac{\log(R^2+6)}{R^3} - \frac{\log 8}{2\sqrt{2}} \right\} - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{9\sqrt{6}} \left(\arctan \frac{R}{\sqrt{6}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{3} \left(0 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log 8 \right) - \frac{1}{9} \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{9\sqrt{6}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \log 8 + \frac{1}{9\sqrt{2}} - \frac{\pi}{27\sqrt{6}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \log 2 + \frac{1}{9\sqrt{2}} - \frac{\pi}{27\sqrt{6}}
 \end{aligned}$$

$$* \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2+6)}{x^3} \ominus \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2+6}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3x(x^2+6)} = 0$$

② $f(x, y) = y^3 + x^2y - \frac{2}{3}x^2 - y^2 - 3xy + 2x + \frac{5}{4}y$ について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ。

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ。

※ $f(x, y) : C^2$ 級で、 $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) : \text{極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極大値}$

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする。

※ 物理数学の $D(x, y) = f_{xy}(x, y)^2 - f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y)$ を用いてもよい。

(1) 停留点は、連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2xy - \frac{4}{3}x - 3y + 2 = 0 & \dots ① \\ f_y(x, y) = 3y^2 + x^2 - 2y - 3x + \frac{5}{4} = 0 & \dots ② \end{cases}$$

の解である。

①より

$$2x(y - \frac{2}{3}) - 3(y - \frac{2}{3}) = 0$$

$$(2x - 3)(y - \frac{2}{3}) = 0$$

$$\therefore x = \frac{3}{2} \quad \vee \quad y = \frac{2}{3}$$

(i) $x = \frac{3}{2}$ のとき

②より

$$3y^2 + \frac{9}{4} - 2y - \frac{9}{2} + \frac{5}{4} = 0$$

$$3y^2 - 2y - 1 = 0$$

$$(3y + 1)(y - 1) = 0$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}, 1$$

(ii) $y = \frac{2}{3}$ のとき

②より

$$\frac{4}{3} + x^2 - \frac{4}{3} - 3x + \frac{5}{4} = 0$$

$$x^2 - 3x + \frac{5}{4} = 0$$

$$(x - \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2}) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}$$

以上 (i), (ii) より、停留点は

$$(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}), (\frac{3}{2}, 1), (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), (\frac{5}{2}, \frac{2}{3})$$

$$(2) f_{xx}(x, y) = 2y - \frac{4}{3}, f_{yy}(x, y) = 6y - 2$$

$$f_{xy}(x, y) = 2x - 3$$

$$H(x, y) = (2y - \frac{4}{3})(6y - 2) - (2x - 3)^2$$

である。

$$\bullet H(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}) = (-2) \cdot (-4) - 0^2 = 8 > 0$$

$$f_{xx}(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}) = -2 < 0$$

$$\therefore f(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}) = \frac{91}{54} : \text{極大値}$$

$$\bullet H(\frac{3}{2}, 1) = \frac{2}{3} \cdot 4 - 0^2 = \frac{8}{3} > 0$$

$$f_{xx}(\frac{3}{2}, 1) = \frac{2}{3} > 0$$

$$\therefore f(\frac{3}{2}, 1) = \frac{1}{2} : \text{極小値}$$

$$\bullet H(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) = 0 \cdot 2 - (-2)^2 = -4 < 0$$

$$\therefore f(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) : \text{極値でない}$$

$$\bullet H(\frac{5}{2}, \frac{2}{3}) = 0 \cdot 2 - 2^2 = -4 < 0$$

$$\therefore f(\frac{5}{2}, \frac{2}{3}) : \text{極値でない}$$