

|                                       |         |            |                                                     |            |        |            |  |            |  |     |
|---------------------------------------|---------|------------|-----------------------------------------------------|------------|--------|------------|--|------------|--|-----|
| 科目名                                   | 微積分学演習  | 対 象        | 1OB-B                                               | 学 部<br>研究科 | 理学部第一部 | 学 科<br>専攻科 |  | 学 籍<br>番 号 |  | 評 点 |
| 平成 26 年 5 月 22 日 (木) 2 回目<br>( ~ 時限目) |         |            |                                                     | 担 当        | 石川 学   | 学 年        |  | 氏 名        |  |     |
| 試 験<br>時 間                            | 45<br>分 | 注 意<br>事 項 | ① 筆記用具以外持込不可<br><del>2. 下記のみ参照 持込可</del><br>(裏面使用可) |            |        |            |  |            |  |     |

1 次の集合  $A$  に対して,  $\sup A$  と  $\inf A$  を求めよ. この問題は答えのみ採点する.

(1)  $A = \left\{ \frac{4n + 13}{n + 3} + (-1)^n \cdot \frac{n + 6}{n + 5} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$       (2)  $A = \left\{ \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

2 次の数列  $\{a_n\}$  の極限值を求めよ. この問題は結論に至る過程も採点する.

(1)  $a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!n^{2n}}{(4n)!}} \quad (n \in \mathbb{N})$       (2)  $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} \quad (n \in \mathbb{N})$

|                      |                  |      |                                        |           |        |           |  |          |  |    |
|----------------------|------------------|------|----------------------------------------|-----------|--------|-----------|--|----------|--|----|
| 科目名                  | 微積分学演習           | 対象   | 10B-B                                  | 学部<br>研究科 | 理学部第一部 | 学科<br>専攻科 |  | 学籍<br>番号 |  | 評点 |
| 平成 26 年 5 月 22 日 (木) | 2 回目<br>( ~ 時限目) | 担当   | 石川 学                                   | 学年        |        | 氏名        |  |          |  |    |
| 試験<br>時間             | 45<br>分          | 注意事項 | ① 筆記用具以外持込不可<br>② 下記のみ参照持込可<br>(裏面使用可) |           |        |           |  |          |  |    |

1 次の集合  $A$  に対して,  $\sup A$  と  $\inf A$  を求めよ. この問題は答えのみ採点する.

$$(1) A = \left\{ \frac{4n+13}{n+3} + (-1)^n \cdot \frac{n+6}{n+5} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad (2) A = \left\{ \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(i) a_n = \frac{4n+13}{n+3} + (-1)^n \cdot \frac{n+6}{n+5} \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ とおき, } m \in \mathbb{N} \text{ とする.}$$

$$(i) a_{2m-1} = \frac{8m+9}{2m+2} - \frac{2m+5}{2m+4} = \frac{4(2m+2)+1}{2m+2} - \frac{(2m+4)+1}{2m+4}$$

$$= 4 + \frac{1}{2m+2} - 1 - \frac{1}{2m+4} = 3 + \frac{1}{2(m+1)(m+2)}$$

$$\text{だから } 3 < a_{2m-1} \leq \frac{37}{12} \quad (\text{等号: } m=1)$$

$$(ii) a_{2m} = \frac{8m+13}{2m+3} + \frac{2m+6}{2m+5} = \frac{4(2m+3)+1}{2m+3} + \frac{(2m+5)+1}{2m+5}$$

$$= 4 + \frac{1}{2m+3} + 1 + \frac{1}{2m+5} = 5 + \frac{1}{2m+3} + \frac{1}{2m+5}$$

$$\text{だから } 5 < a_{2m} \leq \frac{187}{35} \quad (\text{等号: } m=1)$$

以上 (i), (ii) より

$$3 < a_m \leq \frac{187}{35} \quad (\text{等号: } m=2)$$

$$\cdot \max A = \frac{187}{35} \text{ だから } \sup A = \frac{187}{35}$$

$$\cdot 3 \text{ は } A \text{ の下界で, } \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \frac{1}{2(m+1)(m+2)} \right\} = 3$$

$$\text{だから } \inf A = 3$$

$$(2) f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = \frac{2-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \text{ だから 増減表は}$$

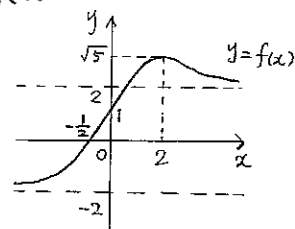
|        |            |            |            |
|--------|------------|------------|------------|
| $x$    | $\cdots$   | 2          | $\cdots$   |
| $f(x)$ | $+$        | 0          | $-$        |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\sqrt{5}$ | $\searrow$ |

また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

だから, グラフは 図 のようになる.

$$\therefore \sup A = \sqrt{5}, \quad \inf A = -2$$



2 次の数列  $\{a_n\}$  の極限値を求めよ. この問題は結論に至る過程も採点する.

$$(1) a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!n^{2n}}{(4n)!}} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2) a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n+3} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(1) b_m = \frac{(2m)!m^{2m}}{(4m)!} \quad (m \in \mathbb{N}) \text{ とおくと, } b_m > 0 \text{ で}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_{m+1}}{b_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2m+2)!(m+1)^{2m+2}}{(4m+4)!} \cdot \frac{(4m)!}{(2m)!m^{2m}}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2m+1)(2m+2)(m+1)^2}{(4m+1)(4m+2)(4m+3)(4m+4)} \left( \frac{m+1}{m} \right)^{2m}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{1}{m})^2}{4(4+\frac{1}{m})(4+\frac{3}{m})} \left\{ \left( 1+\frac{1}{m} \right)^m \right\}^2$$

$$= \frac{e^2}{64}$$

$$\therefore \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{b_m} = \frac{e^2}{64}$$

(2) まず,  $m \in \mathbb{N}$  に対して

$$1 \leq a_m < 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す.

(i)  $a_1 = 1$  より,  $m=1$  のとき  $\textcircled{1}$  は成り立つ.

(ii)  $m=k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) のとき  $\textcircled{1}$  が成り立つと仮定すると

$$1 \leq a_k < 3$$

よって

$$2 \leq 2a_k < 6$$

$$5 \leq 2a_k+3 < 9$$

$$\sqrt{5} \leq \sqrt{2a_k+3} < 3$$

$$\sqrt{5} \leq a_{k+1} < 3 \quad \therefore 1 \leq a_{k+1} < 3$$

よって,  $m=k+1$  のときも  $\textcircled{1}$  が成り立つ.

以上 (i), (ii) より,  $m \in \mathbb{N}$  に対して  $\textcircled{1}$  が成り立つ.

これより,  $\{a_m\}$  は有界であることがわかり, さらに

$$a_{m+1} - a_m = \sqrt{2a_m+3} - a_m = \frac{(2a_m+3) - a_m^2}{\sqrt{2a_m+3} + a_m} = \frac{(1+a_m)(3-a_m)}{\sqrt{2a_m+3} + a_m} > 0$$

より  $a_m < a_{m+1}$ , すなわち,  $\{a_m\}$  は単調増加であることがわかる.

よって,  $\{a_m\}$  は収束する. よって, 極限値を  $a$  とすると,  $\textcircled{1}$  より

$$1 \leq a \leq 3 \quad \cdots \textcircled{2} \text{ であり, 漸化式で } m \rightarrow \infty \text{ とすると}$$

$$a = \sqrt{2a+3}$$

$\textcircled{2}$  のとき, 両辺正だから

$$a^2 = 2a+3$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a+1)(a-3) = 0 \quad \therefore a = 3 \quad (\textcircled{2} \text{ より})$$

$$\text{以上より } \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 3$$

※  $\textcircled{1}$  を示したあと

$$0 < 3 - a_{m+1} = 3 - \sqrt{2a_m+3} = \frac{9 - (2a_m+3)}{3 + \sqrt{2a_m+3}} = \frac{2(3-a_m)}{3 + \sqrt{2a_m+3}} \leq \frac{2}{3}(3-a_m)$$

を導き, これをくり返し利用すると

$$0 < 3 - a_m \leq \left( \frac{2}{3} \right)^{m-1} (3 - a_1) \quad \therefore 0 < 3 - a_m \leq 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{m-1}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{m-1} = 0 \text{ だから, はさみうちの原理より } \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 3$$