

科目名	微積分学演習	対 象	1OB-B	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 26 年 11 月 13 日 (木) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	80 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照 持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
★空欄補充以外の解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

1 $\frac{-5x^2+2x+4}{x(x+1)^2(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+4}$

が常に成り立つとき

$A = \text{ } , B = \text{ } , C = \text{ } ,$

$D = \text{ } , E = \text{ }$

である。空欄を埋めて、次の積分を求めよ。

$\int \frac{-5x^2+2x+4}{x(x+1)^2(x^2+2x+4)} dx$

(2) $\int \frac{1}{x\sqrt{3x^2-8x+4}} dx \quad (\sqrt{3x^2-8x+4} + \sqrt{3}x = t)$

2 次の積分を、カッコ内の置換により求めよ。答えは、 t についての積分を実行したところまででよいことにする (x の式にもどさなくてもよいことにする)。

(1) $\int \frac{6\cos x - 10}{(2\sin x - \cos x - 3)(\sin x - 2)} dx \quad \left(\tan \frac{x}{2} = t\right)$

□3 次の広義積分を求めよ.

(1) $\int_{-2}^{\infty} x e^{-2x} dx$

(2) $\int_0^5 \frac{\log x}{(x+5)^2} dx$

(3) $\int_1^{\infty} \frac{\log(x^2+3)}{x^4} dx$

科目名	微積分学演習	対象	10B-B	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 26 年 11 月 13 日 (木)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	80 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
 ★空欄補充以外の解答はすべて記述式とし、答えのみは正解と
 しません。

$$1) \frac{-5x^2+2x+4}{x(x+1)^2(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+4}$$

が常に成り立つとき

$$A = \boxed{1}, B = \boxed{-3}, C = \boxed{1},$$

$$D = \boxed{2}, E = \boxed{0}$$

である。空欄を埋めて、次の積分を求めよ。

$$\begin{aligned} & \int \frac{-5x^2+2x+4}{x(x+1)^2(x^2+2x+4)} dx \\ &= \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2x}{x^2+2x+4} \right\} dx \\ &= \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{(2x+2)-2}{x^2+2x+4} \right\} dx \\ &= \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2x+2}{x^2+2x+4} - \frac{2}{(\sqrt{3})^2+(x+1)^2} \right\} dx \\ &= \log|x| - 3\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + \log(x^2+2x+4) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

2) 次の積分を、カッコ内の置換により求めよ。答えは、 t につ
 いての積分を実行したところまででよいことにする (x の式に
 もどさなくてもよいことにする)。

$$(1) \int \frac{6\cos x - 10}{(2\sin x - \cos x - 3)(\sin x - 2)} dx \quad \left(\tan \frac{x}{2} = t \right)$$

$$\tan \frac{x}{2} = t \text{ とおく}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

であるから

$$\begin{aligned} & \int \frac{6\cos x - 10}{(2\sin x - \cos x - 3)(\sin x - 2)} dx \\ &= \int \frac{6 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} - 10}{\left(2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 3 \right) \left(\frac{2t}{1+t^2} - 2 \right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{-8t^2-2}{(t^2-2t+2)(t^2-t+1)} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int \left(\frac{2t-18}{t^2-2t+2} + \frac{-2t+8}{t^2-t+1} \right) dt \\ &= \int \left\{ \frac{(2t-2)-16}{t^2-2t+2} + \frac{-(2t-1)+7}{t^2-t+1} \right\} dt \\ &= \int \left\{ \frac{2t-2}{t^2-2t+2} - \frac{16}{1+(t-1)^2} - \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{7}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(t-\frac{1}{2})^2} \right\} dt \\ &= \log(t^2-2t+2) - 16\arctan(t-1) - \log(t^2-t+1) + \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \log(t^2-2t+2) - 16\arctan(t-1) - \log(t^2-t+1) + \frac{14}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\ast \frac{-8t^2-2}{(t^2-2t+2)(t^2-t+1)} = \frac{At+B}{t^2-2t+2} + \frac{Ct+D}{t^2-t+1}$$

と設定すると $A=2, B=-18, C=-2, D=8$ とおける。

$$(2) \int \frac{1}{x\sqrt{3x^2-8x+4}} dx \quad (\sqrt{3x^2-8x+4} + \sqrt{3}x = t)$$

$$\sqrt{3x^2-8x+4} + \sqrt{3}x = t \text{ とおく}$$

$$\sqrt{3x^2-8x+4} = t - \sqrt{3}x$$

$$3x^2-8x+4 = t^2 - 2\sqrt{3}tx + 3x^2$$

$$\therefore x = \frac{t^2-4}{2(\sqrt{3}t-4)}$$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t \cdot (\sqrt{3}t-4) - (t^2-4) \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3}t-4)^2} = \frac{\sqrt{3}t^2-8t+4\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}t-4)^2}$$

さらに

$$\sqrt{3x^2-8x+4} = t - \sqrt{3}x = t - \sqrt{3} \cdot \frac{t^2-4}{2(\sqrt{3}t-4)} = \frac{\sqrt{3}t^2-8t+4\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}t-4)}$$

よって

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x\sqrt{3x^2-8x+4}} dx \\ &= \int \frac{1}{\frac{t^2-4}{2(\sqrt{3}t-4)} \cdot \frac{\sqrt{3}t^2-8t+4\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}t-4)}} \cdot \frac{\sqrt{3}t^2-8t+4\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}t-4)^2} dt \\ &= \int \frac{2}{t^2-4} dt \\ &= \int \frac{2}{(t-2)(t+2)} dt \\ &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} (\log|t-2| - \log|t+2|) \end{aligned}$$

3 次の広義積分を求めよ。

$$(1) \int_{-2}^{\infty} x e^{-2x} dx$$

$$x \begin{array}{l} \nearrow -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ \searrow e^{-2x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int x e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \end{aligned}$$

∴ 求めるから

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{\infty} x e^{-2x} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-2}^R x e^{-2x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]_{-2}^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \{ R e^{-2R} - (-2 e^4) \} - \frac{1}{4} (e^{-2R} - e^4) \right] \\ &= -\frac{1}{2} (0 + 2 e^4) - \frac{1}{4} (0 - e^4) \\ &= -\frac{3}{4} e^4 \end{aligned}$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} \ominus \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 e^{2x}} = 0$$

$$(2) \int_0^5 \frac{\log x}{(x+5)^2} dx$$

$$\log x \begin{array}{l} \nearrow -\frac{1}{x+5} \\ \searrow \frac{1}{x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{(x+5)^2} dx &= -\frac{\log x}{x+5} + \int \frac{1}{x(x+5)} dx \\ &= -\frac{\log x}{x+5} + \int \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} \right) dx \\ &= -\frac{\log x}{x+5} + \frac{1}{5} \{ \log x - \log(x+5) \} \\ &= \frac{x \log x}{5(x+5)} - \frac{1}{5} \log(x+5) \end{aligned}$$

∴ 求めるから

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{\log x}{(x+5)^2} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^5 \frac{\log x}{(x+5)^2} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{x \log x}{5(x+5)} - \frac{1}{5} \log(x+5) \right]_{\varepsilon}^5 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{5 \log 5}{10} - \frac{\varepsilon \log \varepsilon}{\varepsilon+5} \right) - \frac{1}{5} \{ \log 10 - \log(\varepsilon+5) \} \right] \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \log 5 - 0 \right) - \frac{1}{5} (\log 10 - \log 5) \\ &= \frac{1}{10} \log 5 - \frac{1}{5} \log 2 \end{aligned}$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \ominus \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

$$(3) \int_1^{\infty} \frac{\log(x^2+3)}{x^4} dx$$

$$\log(x^2+3) \begin{array}{l} \nearrow -\frac{1}{3x^3} \\ \searrow \frac{2x}{x^2+3} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(x^2+3)}{x^4} dx &= -\frac{\log(x^2+3)}{3x^3} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2(x^2+3)} dx \\ &= -\frac{\log(x^2+3)}{3x^3} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+3} \right) dx \\ &= -\frac{\log(x^2+3)}{3x^3} + \frac{2}{9} \int \left\{ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\sqrt{3})^2+x^2} \right\} dx \\ &= -\frac{\log(x^2+3)}{3x^3} + \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

∴ 求めるから

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\log(x^2+3)}{x^4} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{\log(x^2+3)}{x^4} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{\log(x^2+3)}{3x^3} - \frac{2}{9x} - \frac{2}{9\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_1^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{3} \left\{ \frac{\log(R^2+3)}{R^3} - \frac{\log 4}{1} \right\} - \frac{2}{9} \left(\frac{1}{R} - 1 \right) - \frac{2}{9\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{R}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{3} (0 - \log 4) - \frac{2}{9} (0 - 1) - \frac{2}{9\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{1}{3} \log 4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{27\sqrt{3}} \pi \end{aligned}$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2+3)}{x^3} \ominus \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2+3}}{\frac{2x}{3x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3x(x^2+3)} = 0$$