

科目名	微積分学演習	対 象	1OB-B	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 26 年 12 月 11 日 (木) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石 川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	50 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 2. 下記のみ参照 持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.
★空欄補充以外の解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません.

1 (1) $\tan \frac{x}{2} = t$ とおくことにより, $\int \frac{-5 \cos x + 3}{\cos x (\sin x - 2)} dx$ を求めよ. 答えは, t についての積分を実行したところまででよいことにする (x の式にもどさなくてもよいことにする).

(2) $\int_2^{\infty} \frac{\arctan x}{x^3} dx$ を求めよ.

□2 $f(x, y) = x^2y + y^3 + \frac{1}{3}x^2 - xy + 2y^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y$ について、
次の問いに答えよ。

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ。

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ。

※ $f(x, y) : C^2$ 級で, $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) : \text{極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極大値}$

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする。

※物理数学の $D(x, y) = f_{xy}(x, y)^2 - f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y)$ を用いてもよい。

科目名	微積分学演習	対象	10B-B	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 26 年 12 月 11 日 (木)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	50 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照 持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
 ★空欄補充以外の解答はすべて記述式とし、答えのみは正解と
 しません。

① (1) $\tan \frac{x}{2} = t$ とおくことにより, $\int \frac{-5 \cos x + 3}{\cos x (\sin x - 2)} dx$ を
 求めよ. 答えは, t についての積分を実行したところまででよ
 いことにする (x の式にもどさなくてもよいことにする).

$\tan \frac{x}{2} = t$ とおくと

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

であるから

$$\int \frac{-5 \cos x + 3}{\cos x (\sin x - 2)} dx$$

$$= \int \frac{-5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3}{\frac{1-t^2}{1+t^2} \left(\frac{2t}{1+t^2} - 2 \right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{8t^2 - 2}{(t^2 - 1)(t^2 - t + 1)} dt$$

$$= \int \frac{8t^2 - 2}{(t-1)(t+1)(t^2 - t + 1)} dt$$

$$= \int \left(\frac{3}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{-2t+6}{t^2-t+1} \right) dt$$

$$= \int \left\{ \frac{3}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{-(2t-1)+5}{t^2-t+1} \right\} dt$$

$$= \int \left\{ \frac{3}{t-1} - \frac{1}{t+1} - \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{5}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(t-\frac{1}{2}\right)^2} \right\} dt$$

$$= 3 \log|t-1| - \log|t+1| - \log(t^2-t+1) + \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 3 \log|t-1| - \log|t+1| - \log(t^2-t+1) + \frac{10}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$$

$$\ast \frac{8t^2 - 2}{(t-1)(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-t+1}$$

と設定すると $A=3, B=-1, C=-2, D=6$ となる。

(2) $\int_2^\infty \frac{\arctan x}{x^3} dx$ を求めよ.

$$\arctan x \begin{matrix} \nearrow -\frac{1}{2x^2} \\ \searrow \frac{1}{x^2} \end{matrix}$$

$$\int \frac{\arctan x}{x^3} dx = -\frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$$

$$= -\frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$= -\frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} - \arctan x \right)$$

であるから

$$\int_2^\infty \frac{\arctan x}{x^3} dx$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R \frac{\arctan x}{x^3} dx$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{\arctan x}{2x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \arctan x \right]_2^R$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\arctan R}{R^2} - \frac{\arctan 2}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} (\arctan R - \arctan 2) \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{4} \arctan 2 \right) - \frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 2 \right)$$

$$= \frac{5}{8} \arctan 2 + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4}$$

2 $f(x, y) = x^2y + y^3 + \frac{1}{3}x^2 - xy + 2y^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y$ について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ。

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ。

※ $f(x, y) : C^2$ 級で, $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) : \text{極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極大値}$

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする。

※物理数学の $D(x, y) = f_{xy}(x, y)^2 - f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y)$ を用いてもよい。

(1) 停留点は、連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2xy + \frac{2}{3}x - y - \frac{1}{3} = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ f_y(x, y) = x^2 + 3y^2 - x + 4y + \frac{1}{4} = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x(x, y) = x^2 + 3y^2 - x + 4y + \frac{1}{4} = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

の解である。

① より

$$2x(y + \frac{1}{3}) - (y + \frac{1}{3}) = 0$$

$$(2x - 1)(y + \frac{1}{3}) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \vee y = -\frac{1}{3}$$

(i) $x = \frac{1}{2}$ のとき

② より

$$\frac{1}{4} + 3y^2 - \frac{1}{2} + 4y + \frac{1}{4} = 0$$

$$3y^2 + 4y = 0$$

$$y(3y + 4) = 0$$

$$\therefore y = 0, -\frac{4}{3}$$

(ii) $y = -\frac{1}{3}$ のとき

② より

$$x^2 + \frac{1}{3} - x - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$$

$$(x + \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2}) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

以上 (i), (ii) より、停留点は

$$(\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}), (\frac{3}{2}, -\frac{1}{3})$$

$$(2) f_{xx}(x, y) = 2y + \frac{2}{3}, f_{yy}(x, y) = 6y + 4$$

$$f_{xy}(x, y) = 2x - 1$$

$$H(x, y) = (2y + \frac{2}{3})(6y + 4) - (2x - 1)^2$$

である。

$$\bullet H(\frac{1}{2}, 0) = \frac{2}{3} \cdot 4 - 0^2 = \frac{8}{3} > 0$$

$$f_{xx}(\frac{1}{2}, 0) = \frac{2}{3} > 0$$

$$\therefore f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{12} : \text{極小値}$$

$$\bullet H(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}) = (-2) \cdot (-4) - 0^2 = 8 > 0$$

$$f_{xx}(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}) = -2 < 0$$

$$\therefore f(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}) = \frac{119}{108} : \text{極大値}$$

$$\bullet H(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) = 0 \cdot 2 - (-2)^2 = -4 < 0$$

$$\therefore f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) : \text{極値でない。}$$

$$\bullet H(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}) = 0 \cdot 2 - 2^2 = -4 < 0$$

$$\therefore f(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}) : \text{極値でない。}$$