

科目名	微積分学	対 象	1OB-B	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 26 年 6 月 16 日 (月) 1 回目 (~ 時限目)				担 当	石 川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

① $A = \left\{ \frac{4n+9}{n+2} + (-1)^n \cdot \frac{n+4}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ に対して
 $\sup A$ と $\inf A$ を求めよ。

② 次の値を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n(3n)!}{(n+1)^{4n}}}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \log(1 + x + x^2)} - e^x}{x}$

③ 次の問いに答えよ。

(1) $\arctan \sqrt{\frac{5x-2}{9x+7}}$ を微分せよ。

(2) $\arcsin \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$ を微分せよ.

(3) $f(x) = \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$ のとき,
 $(1+x^2)^2 f''(x) + x(1+x^2)f'(x) + 2f(x)$ を簡単にせよ.

4 区間 $[1, \infty)$ で正の値をとる単調減少な連続関数 f に対して

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示せ.

(2) $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ ($x \geq 1$) のとき, 数列 $\{a_n\}$ の極限值を求めよ.

科目名	微積分学	対象	10B-B	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 26 年 6 月 16 日 (月)	1 回目	(~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名			
試験 時間	90 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記の参考資料持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

[1] $A = \left\{ \frac{4n+9}{n+2} + (-1)^n \cdot \frac{n+4}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ に対して

$\sup A$ と $\inf A$ を求めよ。

$a_m = \frac{4m+9}{m+2} + (-1)^m \cdot \frac{m+4}{m+3}$ ($m \in \mathbb{N}$) とおき, $m \in \mathbb{N}$ とする。

(i) $a_{2m-1} = \frac{8m+5}{2m+1} - \frac{2m+3}{2m+2} = 3 + \frac{1}{(2m+1)(2m+2)}$

だから $3 < a_{2m-1} \leq \frac{37}{12}$ (等号: $m=1$)

(ii) $a_{2m} = \frac{8m+9}{2m+2} + \frac{2m+4}{2m+3} = 5 + \frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m+3}$

だから $5 < a_{2m} \leq \frac{109}{20}$ (等号: $m=1$)

以上 (i), (ii) より

$3 < a_m \leq \frac{109}{20}$ (等号: $m=2$)

$\max A = \frac{109}{20}$ だから $\sup A = \frac{109}{20}$

3 は A の下界で, $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} \right\} = 3$

だから $\inf A = 3$

[2] 次の値を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n (3n)!}{(n+1)^{4n}}}$

$a_m = \frac{m^m (3m)!}{(m+1)^{4m}}$ ($m \in \mathbb{N}$) とおくと, $a_m > 0$ である。

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)^{m+1} \cdot (3m+3)!}{(m+2)^{4m+4}} \cdot \frac{(m+1)^{4m}}{m^m (3m)!} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)(3m+1)(3m+2)(3m+3)}{(m+1)^4} \left(\frac{m+1}{m} \right)^m \left(\frac{m+1}{m+2} \right)^{4m+4} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{3 \left(3 + \frac{1}{m} \right) \left(3 + \frac{2}{m} \right) \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m}{\left(1 + \frac{1}{m} \right)^2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{m+1} \right)^{m+1} \right\}^4} \\ &= \frac{27e}{e^4} \\ &= \frac{27}{e^3} \end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n (3n)!}{(n+1)^{4n}}} = \frac{27}{e^3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \log(1+x+x^2)} - e^x}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{1 + \log(1+x+x^2)\} - e^{2x}}{x \{ \sqrt{1 + \log(1+x+x^2)} + e^x \}}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log(1+x+x^2)}{x+x^2} \cdot (1+x) - \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot 2 \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \log(1+x+x^2)} + e^x}$

$= (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) \cdot \frac{1}{1+1}$

$= -\frac{1}{2}$

[3] 次の問いに答えよ。

(1) $\arctan \sqrt{\frac{5x-2}{9x+7}}$ を微分せよ。

$$\begin{aligned} \left(\arctan \sqrt{\frac{5x-2}{9x+7}} \right)' &= \frac{1}{1 + \frac{5x-2}{9x+7}} \cdot \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\frac{5x-2}{9x+7}}} \cdot \frac{5 \cdot (9x+7) - (5x-2) \cdot 9}{(9x+7)^2} \right\} \\ &= \frac{9x+7}{14x+5} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9x+7}{5x-2}} \cdot \frac{53}{(9x+7)^2} \\ &= \frac{53}{2(14x+5)(9x+7)} \sqrt{\frac{9x+7}{5x-2}} \end{aligned}$$

(2) $\arcsin \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$ を微分せよ.

$$\begin{aligned} \left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2+4}}} \cdot \left(-\frac{4x}{2\sqrt{x^2+4}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}} \cdot \frac{-2x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+4}}{|x|} \cdot \frac{-2x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{-2x}{|x|(x^2+4)} \end{aligned}$$

(3) $f(x) = \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$ のとき,
 $(1+x^2)^2 f''(x) + x(1+x^2)f'(x) + 2f(x)$ を簡単にせよ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 \cdot \arctan x + x \cdot \frac{1}{1+x^2}) \cdot \sqrt{1+x^2} - x \arctan x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{(1+x^2) \arctan x + x - x^2 \arctan x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\arctan x + x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

両辺に $\sqrt{1+x^2}$ をかけると

$$\sqrt{1+x^2} f'(x) = \frac{\arctan x + x}{1+x^2}$$

両辺を微分すると

$$\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot f'(x) + \sqrt{1+x^2} \cdot f''(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2} + 1\right) \cdot (1+x^2) - (\arctan x + x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{x f'(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2} f''(x) = \frac{2-x^2-2x \arctan x}{(1+x^2)^2}$$

両辺に $(1+x^2)\sqrt{1+x^2}$ をかけると

$$x(1+x^2)f'(x) + (1+x^2)^2 f''(x) = \frac{2-x^2-2x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$x(1+x^2)f'(x) + (1+x^2)^2 f''(x) = \frac{2-x^2}{\sqrt{1+x^2}} - 2f(x)$$

$$\therefore (1+x^2)^2 f''(x) + x(1+x^2)f'(x) + 2f(x) = \frac{2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

[4] 区間 $[1, \infty)$ で正の値をとる単調減少な連続関数 f に対して

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示せ.

グラフより, $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$f(k+1) < \int_k^{k+1} f(x) dx < f(k)$$

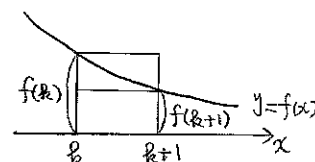
が成り立つ. よって, $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} a_m - a_{m+1} &= \left\{ \sum_{k=1}^m f(k) - \int_1^m f(x) dx \right\} - \left\{ \sum_{k=1}^{m+1} f(k) - \int_1^{m+1} f(x) dx \right\} \\ &= \int_m^{m+1} f(x) dx - f(m+1) > 0 \quad \therefore a_{m+1} < a_m \end{aligned}$$

また, $m \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{k=1}^m f(k) - \int_1^m f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^m f(k) - \sum_{k=1}^{m-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right\} + f(m) > 0 \end{aligned}$$

以上より, $\{a_n\}$ は単調減少で下に有界であるから,
 単調数列の収束定理より, $\{a_n\}$ は収束する.



(2) $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ ($x \geq 1$) のとき, 数列 $\{a_n\}$ の極限值を求めよ.

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} - \int_1^m \frac{1}{2x-1} dx \\ &= \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k} - \left[\frac{1}{2} \log |2x-1| \right]_1^m \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} - \log 2m + \log 2m \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \log m + \log m \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ \log(2m-1) - 0 \} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} - \log 2m \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \log m \right) \\ &\quad + \log 2 - \frac{1}{2} \log \left(2 - \frac{1}{m} \right) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} a_m &= \gamma - \frac{\gamma}{2} + \log 2 - \frac{1}{2} \log 2 \\ &= \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$