

科目名	微積分学演習	対 象	1OB-A	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 27 年 6 月 24 日 (水) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	60 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 2. 下記のみ参照 持込可 ()							

1 次の問いに答えよ.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!(n+1)^{4n}}{(n!)^3(3n)!}}$ を求めよ.

(2) $\arctan \sqrt{\frac{13x-3}{8x+5}}$ を微分せよ.

(3) $\arccos \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}$ を微分せよ.

(4) $f(x) = \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$ のとき,
 $(1+x^2)^2 f''(x) + 4x(1+x^2)f'(x) - f(x)$ を簡単にせよ.

□2 $\mathbb{R}$ で無限回微分可能な関数 f が

$$f(0) = 1, \quad (8 + 2x^2)f'(x) = (4 - 3x)f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たすとする.

(1) $n \geq 2$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を $n, f^{(n-1)}(0), f^{(n-2)}(0)$ を用いて表せ.

(2) $f^{(2)}(0), f^{(3)}(0), f^{(4)}(0), f^{(5)}(0), f^{(6)}(0)$ を求めよ.

科目名	微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 27 年 6 月 24 日 (水)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	60 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							

① 次の問いに答えよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!(n+1)^{4n}}{(n!)^3(3n)!}}$ を求めよ。

$$a_n = \frac{(2n)!(n+1)^{4n}}{(n!)^3(3n)!} > 0 \quad \text{とあるから}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!(n+2)^{4n+4}}{\{(n+1)!\}^3(3n+3)!} \cdot \frac{(n!)^3(3n)!}{(2n)!(n+1)^{4n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{3(3n+1)(3n+2)} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{4n+4} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})}{3(3+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right\}^4 \\ &= \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot e^4 \\ &= \frac{4}{27} e^4 \end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{4}{27} e^4$$

(2) $\arctan \sqrt{\frac{13x-3}{8x+5}}$ を微分せよ。

$$\begin{aligned} \left(\arctan \sqrt{\frac{13x-3}{8x+5}} \right)' &= \frac{1}{1 + \frac{13x-3}{8x+5}} \cdot \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\frac{13x-3}{8x+5}}} \cdot \frac{13 \cdot (8x+5) - (13x-3) \cdot 8}{(8x+5)^2} \right\} \\ &= \frac{8x+5}{21x+2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8x+5}{13x-3}} \cdot \frac{89}{(8x+5)^2} \\ &= \frac{89}{2(21x+2)(8x+5)} \sqrt{\frac{8x+5}{13x-3}} \end{aligned}$$

(3) $\arccos \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}$ を微分せよ。

$$\begin{aligned} \left(\arccos \frac{4}{\sqrt{x^2+16}} \right)' &= - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16}{x^2+16}}} \cdot \left(- \frac{4 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+16}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{x^2+16}{x^2}} \cdot \frac{4x}{(x^2+16)\sqrt{x^2+16}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+16}}{|x|} \cdot \frac{4x}{(x^2+16)\sqrt{x^2+16}} \\ &= \frac{4x}{|x|(x^2+16)} \end{aligned}$$

(4) $f(x) = \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$ のとき,

$(1+x^2)^2 f''(x) + 4x(1+x^2)f'(x) - f(x)$ を簡単にせよ。

$$f(x) = \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{より} \quad \sqrt{1+x^2} f(x) = x \arctan x$$

両辺微分して

$$\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot f(x) + \sqrt{1+x^2} \cdot f'(x) = 1 \cdot \arctan x + x \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

分母を払って

$$x \sqrt{1+x^2} f(x) + (1+x^2)^{\frac{3}{2}} f'(x) = (1+x^2) \arctan x + x$$

両辺微分して

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sqrt{1+x^2} f(x) + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot f(x) + x \sqrt{1+x^2} \cdot f'(x) \\ + \left\{ \frac{3}{2} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \right\} \cdot f'(x) + (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot f''(x) \\ = 2x \cdot \arctan x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2} f(x) + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} f(x) + x \sqrt{1+x^2} f'(x) + 3x \sqrt{1+x^2} f'(x) + (1+x^2)^{\frac{3}{2}} f''(x) \\ = 2\sqrt{1+x^2} f(x) + 1 + 1 \end{aligned}$$

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} f''(x) + 4x \sqrt{1+x^2} f'(x) - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} f(x) = 2$$

分母を払って

$$(1+x^2)^2 f''(x) + 4x(1+x^2) f'(x) - f(x) = 2\sqrt{1+x^2}$$

$$\ast f'(x) = \frac{\arctan x + x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = \frac{2-2x^2-3x \arctan x}{(1+x^2)^2 \sqrt{1+x^2}}$$

を代入してもよい。

※ 答案によると、①より $(1+x^2)^2 f'(x) = (\arctan x + x) \sqrt{1+x^2}$ としてから両辺微分すると楽に計算できるようです。上の解答を書いた後には知りました。

2 $\mathbb{R}$ で無限回微分可能な関数 f が

$$f(0) = 1, \quad (8 + 2x^2)f'(x) = (4 - 3x)f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たすとする.

(1) $n \geq 2$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を $n, f^{(n-1)}(0), f^{(n-2)}(0)$ を用いて表せ.

(2) $f^{(2)}(0), f^{(3)}(0), f^{(4)}(0), f^{(5)}(0), f^{(6)}(0)$ を求めよ.

(1) $(8 + 2x^2)f'(x) = (4 - 3x)f(x)$ の両辺を $m (\geq 2)$ 回微分すると, Leibniz の公式より

$$\{(8 + 2x^2)f'(x)\}^{(m)} = \{(4 - 3x)f(x)\}^{(m)}$$

$$\sum_{k=0}^m {}^m C_k (8 + 2x^2)^{(k)} \{f'(x)\}^{(m-k)} = \sum_{k=0}^m {}^m C_k (4 - 3x)^{(k)} \{f(x)\}^{(m-k)}$$

$$\underbrace{1 \cdot (8 + 2x^2) \cdot f^{(m+1)}(x)}_{k=0} + \underbrace{m \cdot 4x \cdot f^{(m)}(x)}_{k=1} + \underbrace{\frac{m(m-1)}{2} \cdot 4 \cdot f^{(m-1)}(x)}_{k=2} = \underbrace{1 \cdot (4 - 3x) \cdot f^{(m)}(x)}_{k=1} + \underbrace{m \cdot (-3) \cdot f^{(m-1)}(x)}_{k=2}$$

($m=1$ のとき成り立つ) ($m=1$ のとき成り立つ)

$$\therefore (8 + 2x^2)f^{(m+1)}(x) + \{(4m+3)x - 4\}f^{(m)}(x) + m(2m+1)f^{(m-1)}(x) = 0 \quad (m \geq 1)$$

$x=0$ を代入して

$$8f^{(m+1)}(0) - 4f^{(m)}(0) + m(2m+1)f^{(m-1)}(0) = 0 \quad (m \geq 1)$$

m を $m-1$ にかえて

$$8f^{(m)}(0) - 4f^{(m-1)}(0) + (m-1)(2m-1)f^{(m-2)}(0) = 0 \quad (m \geq 2)$$

$$\therefore f^{(m)}(0) = \frac{4f^{(m-1)}(0) - (m-1)(2m-1)f^{(m-2)}(0)}{8} \quad (m \geq 2)$$

$$(2) f^{(0)}(0) = f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{(4-3x)f(x)}{8+2x^2} \quad \text{より} \quad f^{(1)}(0) = f'(0) = \frac{4f(0)}{8} = \frac{1}{2}$$

これから (1) で導いた漸化式より

$$f^{(2)}(0) = \frac{4f^{(1)}(0) - 1 \cdot 3 \cdot f^{(0)}(0)}{8} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 3 \cdot 1}{8} = -\frac{1}{8}$$

$$f^{(3)}(0) = \frac{4f^{(2)}(0) - 2 \cdot 5 \cdot f^{(1)}(0)}{8} = \frac{4 \cdot (-\frac{1}{8}) - 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}}{8} = -\frac{11}{16}$$

$$f^{(4)}(0) = \frac{4f^{(3)}(0) - 3 \cdot 7 \cdot f^{(2)}(0)}{8} = \frac{4 \cdot (-\frac{11}{16}) - 3 \cdot 7 \cdot (-\frac{1}{8})}{8} = -\frac{1}{64}$$

$$f^{(5)}(0) = \frac{4f^{(4)}(0) - 4 \cdot 9 \cdot f^{(3)}(0)}{8} = \frac{4 \cdot (-\frac{1}{64}) - 4 \cdot 9 \cdot (-\frac{11}{16})}{8} = \frac{395}{128}$$

$$f^{(6)}(0) = \frac{4f^{(5)}(0) - 5 \cdot 11 \cdot f^{(4)}(0)}{8} = \frac{4 \cdot \frac{395}{128} - 5 \cdot 11 \cdot (-\frac{1}{64})}{8} = \frac{845}{512}$$