

科目名	微積分学演習	対 象	1OB-B	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 27 年 6 月 18 日 (木) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	60 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 2. 下記のみ参照 持込可 ()							

1 次の問いに答えよ.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(4n)!(n+1)^{2n}}{n!(2n)!(3n)!}}$ を求めよ.

(2) $\arctan \sqrt{\frac{11x+7}{6x-5}}$ を微分せよ.

(3) $\arccos \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}$ を微分せよ.

(4) $f(x) = \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$ のとき,
 $(1+x^2)^2 f''(x) + 4x(1+x^2)f'(x) - f(x)$ を簡単にせよ.

2 $\mathbb{R}$ で無限回微分可能な関数 f が

$$f(0) = 1, \quad (2 + 2x^2)f'(x) = (2 + x)f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たすとする.

(1) $n \geq 2$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を $n, f^{(n-1)}(0), f^{(n-2)}(0)$ を用いて表せ.

(2) $f^{(2)}(0), f^{(3)}(0), f^{(4)}(0), f^{(5)}(0), f^{(6)}(0)$ を求めよ.

科目名	微積分学演習	対象	1OB-B	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 27 年 6 月 18 日 (木)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	60 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 千記のみ参照・持込可 ()							

1 次の問いに答えよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(4n)!(n+1)^{2n}}{n!(2n)!(3n)!}}$ を求めよ。

$$a_m = \frac{(4m)!(m+1)^{2m}}{m!(2m)!(3m)!} > 0 \quad \text{とおく}$$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(4m+4)!(m+2)^{2m+2}}{(m+1)!(2m+2)!(3m+3)!} \cdot \frac{m!(2m)!(3m)!}{(4m)!(m+1)^{2m}} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{4(4m+1)(4m+3)}{3(3m+1)(3m+2)} \left(\frac{m+2}{m+1} \right)^{2m+2} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{4(4+\frac{1}{m})(4+\frac{3}{m})}{3(3+\frac{1}{m})(3+\frac{2}{m})} \left\{ \left(1 + \frac{1}{m+1} \right)^{m+1} \right\}^2 \\ &= \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot e^2 \\ &= \frac{64}{27} e^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} = \frac{64}{27} e^2$$

(2) $\arctan \sqrt{\frac{11x+7}{6x-5}}$ を微分せよ。

$$\begin{aligned} \left(\arctan \sqrt{\frac{11x+7}{6x-5}} \right)' &= \frac{1}{1 + \frac{11x+7}{6x-5}} \cdot \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\frac{11x+7}{6x-5}}} \cdot \frac{11 \cdot (6x-5) - (11x+7) \cdot 6}{(6x-5)^2} \right\} \\ &= \frac{6x-5}{17x+2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{6x-5}{11x+7}}} \cdot \frac{-97}{(6x-5)^2} \\ &= \frac{-97}{2(17x+2)(6x-5)} \sqrt{\frac{6x-5}{11x+7}} \end{aligned}$$

(3) $\arccos \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}$ を微分せよ。

$$\begin{aligned} \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}} \right)' &= - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{3x^2+1}}} \cdot \left(- \frac{\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}}{3x^2+1} \right) \\ &= \sqrt{\frac{3x^2+1}{3x^2}} \cdot \frac{3x}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{3}|x|} \cdot \frac{3x}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{3}x}{|x|(3x^2+1)} \end{aligned}$$

(4) $f(x) = \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$ のとき、

$(1+x^2)^2 f''(x) + 4x(1+x^2)f'(x) - f(x)$ を簡単にせよ。

$$f(x) = \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{F) } \sqrt{1+x^2} f(x) = x \arctan x$$

両辺微分して

$$\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot f(x) + \sqrt{1+x^2} \cdot f'(x) = 1 \cdot \arctan x + x \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

分母を払って

$$x\sqrt{1+x^2} f(x) + (1+x^2)^{\frac{3}{2}} f'(x) = (1+x^2) \arctan x + x$$

両辺微分して

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sqrt{1+x^2} f(x) + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot f(x) + x\sqrt{1+x^2} \cdot f'(x) \\ + \left\{ \frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \right\} \cdot f'(x) + (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot f''(x) \\ = 2x \cdot \arctan x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2} f(x) + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} f(x) + x\sqrt{1+x^2} f'(x) + 3x\sqrt{1+x^2} f'(x) + (1+x^2)^{\frac{3}{2}} f''(x) \\ = 2\sqrt{1+x^2} f(x) + 1 + 1 \end{aligned}$$

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} f''(x) + 4x\sqrt{1+x^2} f'(x) - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} f(x) = 2$$

分母を払って

$$(1+x^2)^2 f''(x) + 4x(1+x^2) f'(x) - f(x) = 2\sqrt{1+x^2}$$

$$\ast f'(x) = \frac{\arctan x + x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = \frac{2-2x^2-3x\arctan x}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}}$$

を代入してもよい。

※ 答案によると、① F) $(1+x^2)^2 f'(x) = (x \arctan x + x) \sqrt{1+x^2}$ としてから両辺微分すると楽に計算できるから、上の解答を書いた後に知りました。

2 $\mathbb{R}$ で無限回微分可能な関数 f が

$$f(0) = 1, \quad (2 + 2x^2)f'(x) = (2 + x)f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たすとする.

(1) $n \geq 2$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を $n, f^{(n-1)}(0), f^{(n-2)}(0)$ を用いて表せ.

(2) $f^{(2)}(0), f^{(3)}(0), f^{(4)}(0), f^{(5)}(0), f^{(6)}(0)$ を求めよ.

(1) $(2 + 2x^2)f'(x) = (2 + x)f(x)$ の両辺を $m (\geq 2)$ 回微分すると, Leibniz の公式より

$$\begin{aligned} \{(2 + 2x^2)f'(x)\}^{(m)} &= \{(2 + x)f(x)\}^{(m)} \\ \sum_{k=0}^m {}^m C_k (2 + 2x^2)^{(k)} \{f'(x)\}^{(m-k)} &= \sum_{k=0}^m {}^m C_k (2 + x)^{(k)} \{f(x)\}^{(m-k)} \\ \underbrace{1 \cdot (2 + 2x^2) \cdot f^{(m+1)}(x)}_{k=0} + \underbrace{m \cdot 4x \cdot f^{(m)}(x)}_{k=1} + \underbrace{\frac{m(m-1)}{2} \cdot 4 \cdot f^{(m-1)}(x)}_{k=2} &= \underbrace{1 \cdot (2 + x) \cdot f^{(m)}(x)}_{k=0} + \underbrace{m \cdot 1 \cdot f^{(m-1)}(x)}_{k=1} \quad (m=1 \text{ のときは成り立たない}) \\ &\quad (m=1 \text{ のときは成り立たない}) \end{aligned}$$

$$\therefore (2 + 2x^2)f^{(m+1)}(x) + \{4mx - 2\}f^{(m)}(x) + m(2m-3)f^{(m-1)}(x) = 0 \quad (m \geq 1)$$

$x=0$ を代入して

$$2f^{(m+1)}(0) - 2f^{(m)}(0) + m(2m-3)f^{(m-1)}(0) = 0 \quad (m \geq 1)$$

m を $m-1$ に変えて

$$2f^{(m)}(0) - 2f^{(m-1)}(0) + (m-1)(2m-5)f^{(m-2)}(0) = 0 \quad (m \geq 2)$$

$$\therefore f^{(m)}(0) = \frac{2f^{(m-1)}(0) - (m-1)(2m-5)f^{(m-2)}(0)}{2} \quad (m \geq 2)$$

$$(2) f^{(0)}(0) = f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{(2+x)f(x)}{2+2x^2} \quad \text{より} \quad f^{(1)}(0) = f'(0) = \frac{2f(0)}{2} = 1$$

よって (1) で導いた漸化式より

$$f^{(2)}(0) = \frac{2f^{(1)}(0) - 1 \cdot (-1) \cdot f^{(0)}(0)}{2} = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f^{(3)}(0) = \frac{2f^{(2)}(0) - 2 \cdot 1 \cdot f^{(1)}(0)}{2} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f^{(4)}(0) = \frac{2f^{(3)}(0) - 3 \cdot 3 \cdot f^{(2)}(0)}{2} = \frac{\frac{2}{2} - \frac{27}{2}}{2} = -\frac{25}{4}$$

$$f^{(5)}(0) = \frac{2f^{(4)}(0) - 4 \cdot 5 \cdot f^{(3)}(0)}{2} = \frac{-\frac{25}{2} - \frac{20}{2}}{2} = -\frac{45}{4}$$

$$f^{(6)}(0) = \frac{2f^{(5)}(0) - 5 \cdot 7 \cdot f^{(4)}(0)}{2} = \frac{-\frac{90}{4} + \frac{875}{4}}{2} = \frac{785}{8}$$