

科目名	微積分学B演習 微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 27 年 9 月 30 日 (水) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石 川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	30 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照 持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

□1 $t = \tan \frac{x}{2}$ と置換して次を求めよ。その際
 $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$
は証明なしに用いてよい。
(1) $\int \frac{-4}{3+11\cos x} dx$

(2) $\int \frac{3+3\sin x}{\sin x(2+\sin x+\cos x)} dx$

科目名	微積分学B 演習 微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評 点
平成 27 年 9 月 30 日 (水)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	30 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

① $t = \tan \frac{x}{2}$ と置換して次を求めよ。その際

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

は証明なしに用いてよい。

$$\begin{aligned}
 (1) \int \frac{-4}{3+11\cos x} dx &= \int \frac{-4}{3+11 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\
 &= \int \frac{4}{4t^2-7} dt \\
 &= \int \frac{4}{(2t-\sqrt{7})(2t+\sqrt{7})} dt \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{7}} \left(\frac{2}{2t-\sqrt{7}} - \frac{2}{2t+\sqrt{7}} \right) dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{7}} (\log|2t-\sqrt{7}| - \log|2t+\sqrt{7}|) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{7}} \log \left| \frac{2t-\sqrt{7}}{2t+\sqrt{7}} \right| \\
 &= \frac{1}{\sqrt{7}} \log \left| \frac{2\tan \frac{x}{2} - \sqrt{7}}{2\tan \frac{x}{2} + \sqrt{7}} \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int \frac{3+3\sin x}{\sin x(2+\sin x+\cos x)} dx \\
 &= \int \frac{3+3 \cdot \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(2 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\
 &= \int \frac{3t^2+6t+3}{t(t^2+2t+3)} dt \\
 &= \int \left(\frac{1}{t} + \frac{2t+4}{t^2+2t+3} \right) dt \\
 &= \int \left\{ \frac{1}{t} + \frac{(2t+2)+2}{t^2+2t+3} \right\} dt \\
 &= \int \left\{ \frac{1}{t} + \frac{2t+2}{t^2+2t+3} + \frac{2}{(\sqrt{2})^2+(t+1)^2} \right\} dt \\
 &= \log|t| + \log(t^2+2t+3) + \sqrt{2} \arctan \frac{t+1}{\sqrt{2}} \\
 &= \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \log \left(\tan^2 \frac{x}{2} + 2 \tan \frac{x}{2} + 3 \right) \\
 &\quad + \sqrt{2} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$※ \frac{3t^2+6t+3}{t(t^2+2t+3)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+2t+3}$$

と分母の形を求め、分子を分母で割る。

$$3t^2+6t+3 = A(t^2+2t+3) + (Bt+C)t$$

$$3t^2+6t+3 = (A+B)t^2 + (2A+C)t + 3A$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 2A+C=6 \\ 3A=3 \end{cases} \therefore A=1, B=2, C=4$$

点

点