

科目名	微積分学B演習 微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成27年10月7日(水) 2回目 (~ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験 時間	30 分	注 意 事 項	①筆記用具以外持込不可 ②下記のみ参照持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

1 (1) $t = \sqrt{4x^2 - 5x + 9} + 2x$ と置換して
 $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 5x + 9}} dx$ を求めよ。

(2) $t = \sqrt{x^2 + 1} + x$ と置換して
 $\int \frac{8}{-3x + 4 + 5\sqrt{x^2 + 1}} dx$ を求めよ。

科目名	微積分学B 演習 微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 27 年 10 月 7 日 (水)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	30 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照 持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

1 (1) $t = \sqrt{4x^2 - 5x + 9} + 2x$ と置換して

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 5x + 9}} dx \text{ を求めよ。}$$

$$t = \sqrt{4x^2 - 5x + 9} + 2x \text{ とおくと } t - 2x = \sqrt{4x^2 - 5x + 9}$$

両辺を2乗すると

$$t^2 - 4tx + 4x^2 = 4x^2 - 5x + 9 \quad \therefore x = \frac{t^2 - 9}{4t - 5}$$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot (4t - 5) - (t^2 - 9) \cdot 4}{(4t - 5)^2} = \frac{2(2t^2 - 5t + 18)}{(4t - 5)^2}$$

さらに

$$\sqrt{4x^2 - 5x + 9} = t - 2x = t - 2 \cdot \frac{t^2 - 9}{4t - 5} = \frac{2t^2 - 5t + 18}{4t - 5}$$

よって

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 5x + 9}} dx &= \int \frac{1}{\frac{t^2 - 9}{4t - 5} \cdot \frac{2t^2 - 5t + 18}{4t - 5}} \cdot \frac{2(2t^2 - 5t + 18)}{(4t - 5)^2} dt \\
 &= \int \frac{2}{t^2 - 9} dt \\
 &= \int \frac{2}{(t-3)(t+3)} dt \\
 &= \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3} \right) dt \\
 &= \frac{1}{3} (\log|t-3| - \log|t+3|) \\
 &= \frac{1}{3} \log \left| \frac{t-3}{t+3} \right| \\
 &= \frac{1}{3} \log \left| \frac{\sqrt{4x^2 - 5x + 9} + 2x - 3}{\sqrt{4x^2 - 5x + 9} + 2x + 3} \right|
 \end{aligned}$$

(2) $t = \sqrt{x^2 + 1} + x$ と置換して

$$\int \frac{8}{-3x + 4 + 5\sqrt{x^2 + 1}} dx \text{ を求めよ。}$$

$$t = \sqrt{x^2 + 1} + x \text{ とおくと } t - x = \sqrt{x^2 + 1}$$

両辺を2乗すると

$$t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + 1 \quad \therefore x = \frac{t^2 - 1}{2t} \left(= \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right)$$

$$\text{また } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) = \frac{t^2 + 1}{2t^2}$$

$$\text{さらに } \sqrt{x^2 + 1} = t - x = t - \frac{t^2 - 1}{2t} = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

よって

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{8}{-3x + 4 + 5\sqrt{x^2 + 1}} dx \\
 &= \int \frac{8}{-3 \cdot \frac{t^2 - 1}{2t} + 4 + 5 \cdot \frac{t^2 + 1}{2t}} \cdot \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt \\
 &= \int \frac{4t^2 + 4}{t(t+2)^2} dt \\
 &= \int \left\{ \frac{1}{t} + \frac{3}{t+2} - \frac{10}{(t+2)^2} \right\} dt \\
 &= \log|t| + 3\log|t+2| + \frac{10}{t+2} \\
 &= \log|\sqrt{x^2 + 1} + x| + 3\log|\sqrt{x^2 + 1} + x + 2| + \frac{10}{\sqrt{x^2 + 1} + x + 2}
 \end{aligned}$$

$$\ast \frac{4t^2 + 4}{t(t+2)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{(t+2)^2}$$

と分解の形を決め、から分母をばらうと

$$4t^2 + 4 = A(t+2)^2 + Bt(t+2) + Ct$$

$$4t^2 + 4 = (A+B)t^2 + (4A+2B+C)t + 4A$$

$$\begin{cases} A+B=4 \\ 4A+2B+C=0 \\ 4A=4 \end{cases} \quad \therefore A=1, B=3, C=-10$$

点

点