

科目名	微積分学B演習 微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成27年10月28日(水) 2回目 (~ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験 時間	45 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 千記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

1 次の広義積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(2) $\int_{-2}^{\infty} \frac{1}{(3x+7)(2x+5)} dx$

(3) $\int_{-1}^{\infty} x e^{-3x} dx$

(4) $\int_0^2 (x^2 - 5) \log x dx$

点

点

点

点

(5) $\int_0^{\infty} e^{-5x} \cos 3x dx$

(6) $\int_{-1}^{\infty} \frac{x-2}{(x^2+3)(x^2+x+1)} dx$

点

点

科目名	微積分学B 演習 微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 27 年 10 月 28 日 (水)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	45 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記の表参照 持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

① 次の広義積分を求めよ。

$$(1) \int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int_{-1+\varepsilon}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\frac{1}{3} (\arcsin x)^3 \right]_{-1+\varepsilon}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ = \frac{1}{3} \left[\frac{\pi^3}{64} - \{\arcsin(-1+\varepsilon)\}^3 \right]$$

であるから

$$\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left[\frac{\pi^3}{64} - \{\arcsin(-1+\varepsilon)\}^3 \right] \\ = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\pi^3}{64} - \left(-\frac{\pi}{8}\right)^3 \right\} \\ = \frac{3}{64} \pi^3$$

点

$$(2) \int_{-2}^{\infty} \frac{1}{(3x+7)(2x+5)} dx$$

$$\int_{-2}^R \frac{1}{(3x+7)(2x+5)} dx = \int_{-2}^R \left(\frac{3}{3x+7} - \frac{2}{2x+5} \right) dx \\ = \left[\log(3x+7) - \log(2x+5) \right]_{-2}^R \\ = \left[\log \frac{3x+7}{2x+5} \right]_{-2}^R \\ = \log \frac{3R+7}{2R+5} - 0$$

であるから

$$\int_{-2}^{\infty} \frac{1}{(3x+7)(2x+5)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \log \frac{3+\frac{7}{R}}{2+\frac{5}{R}} \\ = \log \frac{3}{2}$$

$$\times \frac{1}{(3x+7)(2x+5)} = \frac{A}{3x+7} + \frac{B}{2x+5} \quad \text{と設定}$$

点

$$(3) \int_{-1}^{\infty} x e^{-3x} dx$$

$$\int_{-1}^R x e^{-3x} dx = \left[-\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} \right]_{-1}^R \\ = -\frac{1}{3} \{ R e^{-3R} - (-e^3) \} - \frac{1}{9} (e^{-3R} - e^3)$$

であるから

$$\int_{-1}^{\infty} x e^{-3x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{3} (R e^{-3R} + e^3) - \frac{1}{9} (e^{-3R} - e^3) \right\} \\ = -\frac{1}{3} (0 + e^3) - \frac{1}{9} (0 - e^3) \\ = -\frac{2e^3}{9}$$

$$\times \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{3x}} \ominus \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3e^{3x}} = 0$$

点

$$(4) \int_0^2 (x^2 - 5) \log x dx$$

$$\int_{\varepsilon}^2 (x^2 - 5) \log x dx = \left[\left(\frac{1}{3} x^3 - 5x \right) \log x - \left(\frac{1}{9} x^3 - 5x \right) \right]_{\varepsilon}^2 \\ \begin{matrix} \log x & \nearrow & \frac{1}{3}x^3-5x \\ \frac{1}{x} & \searrow & x^2-5 \end{matrix} = \left\{ \left(-\frac{22}{3}\log 2\right) - \left(\frac{1}{3}\varepsilon^3-5\varepsilon\right)\log \varepsilon \right\} \\ - \left\{ \left(-\frac{82}{9}\right) - \left(\frac{1}{9}\varepsilon^3-5\varepsilon\right) \right\}$$

であるから

$$\int_0^2 (x^2 - 5) \log x dx \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{22}{3} \log 2 - \left(\frac{1}{3}\varepsilon^3-5\right) \cdot \varepsilon \log \varepsilon + \frac{82}{9} + \left(\frac{1}{9}\varepsilon^3-5\varepsilon\right) \right\} \\ = -\frac{22}{3} \log 2 - (-5) \cdot 0 + \frac{82}{9} + 0 \\ = \frac{82}{9} - \frac{22}{3} \log 2$$

※ $d > 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^d \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{x^{-d}} \ominus \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-d x^{-d-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^d}{-d} = 0$$

点

$$(5) \int_0^{\infty} e^{-5x} \cos 3x dx$$

$$\begin{aligned} \int e^{-5x} \cos 3x dx &= \frac{1}{3} e^{-5x} \sin 3x \\ &\quad + \frac{5}{3} \int e^{-5x} \sin 3x dx \\ &= \frac{1}{3} e^{-5x} \sin 3x \\ &\quad + \frac{5}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{-5x} \cos 3x - \frac{5}{3} \int e^{-5x} \cos 3x dx \right) \\ &= \frac{1}{3} e^{-5x} \sin 3x - \frac{5}{9} e^{-5x} \cos 3x - \frac{25}{9} \int e^{-5x} \cos 3x dx \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{34}{9} \int e^{-5x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{-5x} \sin 3x - \frac{5}{9} e^{-5x} \cos 3x$$

$$\therefore \int e^{-5x} \cos 3x dx = \frac{3}{34} e^{-5x} \sin 3x - \frac{5}{34} e^{-5x} \cos 3x$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-5x} \cos 3x dx &= \left[\frac{3}{34} e^{-5x} \sin 3x - \frac{5}{34} e^{-5x} \cos 3x \right]_0^R \\ &= \frac{3}{34} (e^{-5R} \sin 3R - 1 \cdot 0) - \frac{5}{34} (e^{-5R} \cos 3R - 1 \cdot 1) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-5x} \cos 3x dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3}{34} e^{-5R} \sin 3R - \frac{5}{34} (e^{-5R} \cos 3R - 1) \right\} \\ &= 0 - \frac{5}{34} (0 - 1) \\ &= \frac{5}{34} \end{aligned}$$

$$\ast |e^{-5x} \sin 3x| \leq e^{-5x}, |e^{-5x} \cos 3x| \leq e^{-5x}, \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-5x} = 0$$

であるから、はさみうちの定理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-5x} \sin 3x = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-5x} \cos 3x = 0$$

$$(6) \int_{-1}^{\infty} \frac{x-2}{(x^2+3)(x^2+x+1)} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{(x^2+3)(x^2+x+1)} dx &= \int \left(\frac{1}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+x+1} \right) dx \\ &= \int \left\{ \frac{1}{(\sqrt{3})^2+x^2} - \frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (x+\frac{1}{2})^2} \right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_{-1}^R \frac{x-2}{(x^2+3)(x^2+x+1)} dx &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right]_{-1}^R \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \arctan \frac{R}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \arctan \frac{2R+1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\infty} \frac{x-2}{(x^2+3)(x^2+x+1)} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{R}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2R+1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \\ &= -\frac{2}{3\sqrt{3}} \pi \end{aligned}$$

$$\ast \frac{x-2}{(x^2+3)(x^2+x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} \quad \text{と設定}$$