

科目名	微積分学B 演習 微積分学演習	対 象	10B-A	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 27 年 11 月 11 日 (水) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	25 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 予記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

1 $f(x,y) = x^2y + y^3 + \frac{4}{3}x^2 + 3y^2 - 2xy - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}y$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ。
(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ。

※ $f(x,y) : C^2$ 級で、 $f_x(a,b) = 0, f_y(a,b) = 0$ のとき
 $H(a,b) > 0, f_{xx}(a,b) > 0 \implies f(a,b) : \text{極小値}$
 $H(a,b) > 0, f_{xx}(a,b) < 0 \implies f(a,b) : \text{極大値}$
 $H(a,b) < 0 \implies f(a,b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$ とする。

※物理数学の $D(x,y) = f_{xy}(x,y)^2 - f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$ を用いてもよい。

科目名	微積分学B 演習 微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評 点
平成 27 年 11 月 11 日 (水) 2 回目 (~ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験 時間	25 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

① $f(x, y) = x^2y + y^3 + \frac{4}{3}x^2 + 3y^2 - 2xy - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}y$ について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ。

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ。

※ $f(x, y) : C^2$ 級で、 $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) : \text{極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極大値}$

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする。

※物理数学の $D(x, y) = f_{xy}(x, y)^2 - f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y)$ を用いてもよい。

$$(1) \begin{cases} f_x(x, y) = 2x + \frac{8}{3} - 2y - \frac{8}{3} = 0 & \cdots ① \\ f_y(x, y) = x^2 + 3y^2 + 6y - 2x + \frac{8}{3} = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{①より} \quad 2x(y + \frac{4}{3}) - 2(y + \frac{4}{3}) &= 0 \\ 2(x-1)(y + \frac{4}{3}) &= 0 \\ \therefore x = 1 \vee y = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(i) } x = 1 \text{ のとき, ②より} \\ 3y^2 + 6y + \frac{5}{3} &= 0 \\ 9y^2 + 18y + 5 &= 0 \\ (3y+1)(3y+5) &= 0 \\ \therefore y &= -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } y = -\frac{4}{3} \text{ のとき, ②より} \\ x^2 - 2x &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 2 \end{aligned}$$

以上(i), (ii)より、停留点は

$$(1, -\frac{1}{3}), (1, -\frac{5}{3}), (0, -\frac{4}{3}), (2, -\frac{4}{3})$$

$$(2) f_{xx}(x, y) = 2y + \frac{8}{3}, f_{yy}(x, y) = 6y + 6, f_{xy}(x, y) = 2x - 2$$

$$H(x, y) = (2y + \frac{8}{3})(6y + 6) - (2x - 2)^2$$

$$\begin{aligned} \bullet H(1, -\frac{1}{3}) &= 2 \cdot 4 - 0^2 = 8 > 0, f_{xx}(1, -\frac{1}{3}) = 2 > 0 \\ \therefore f(1, -\frac{1}{3}) &= -\frac{43}{27} : \text{極小値} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet H(1, -\frac{5}{3}) &= (-\frac{2}{3}) \cdot (-4) - 0^2 = \frac{8}{3} > 0, f_{xx}(1, -\frac{5}{3}) = -\frac{2}{3} < 0 \\ \therefore f(1, -\frac{5}{3}) &= -\frac{11}{27} : \text{極大値} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet H(0, -\frac{4}{3}) &= 0 \cdot (-2) - (-2)^2 = -4 < 0 \\ \therefore f(0, -\frac{4}{3}) &: \text{極値でない} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet H(2, -\frac{4}{3}) &= 0 \cdot (-2) - 2^2 = -4 < 0 \\ \therefore f(2, -\frac{4}{3}) &: \text{極値でない} \end{aligned}$$