

科目名	微積分学 B 演習 微積分学演習	対 象	10B-A	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 27 年 12 月 2 日 (水) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	45 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記の参考照 持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

1 次の累次積分を求めよ。

(1) $\int_e^{e^2} \left(\int_1^x \frac{1}{xy} dy \right) dx$

(2) $\int_1^2 \left(\int_1^x \frac{x^2}{y} dy \right) dx$

点

点

(3) $\int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (2x + 3y^2) dy \right\} dx$

(4) $\int_{-1}^2 \left\{ \int_{-3}^{x^2} (3x + 2y) dy \right\} dx$

点

点

(5) $\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \left(\int_{\sin x}^x y \cos x dy \right) dx$

点

(6) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left(\int_{-x^2}^x \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) dx$

点

科目名	微積分学B 演習 微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 27 年 12 月 2 日 (水)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	45 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

① 次の累次積分を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \int_e^{e^2} \left(\int_1^x \frac{1}{xy} dy \right) dx &= \int_e^{e^2} \left[\frac{\log y}{x} \right]_{y=1}^{y=x} dx \\
 &= \int_e^{e^2} \frac{1}{x} (\log x - 0) dx \\
 &= \int_e^{e^2} \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_e^{e^2} \\
 &= \frac{1}{2} (4 - 1) \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

点

$$\begin{aligned}
 (2) \int_1^2 \left(\int_1^x \frac{x^2}{y} dy \right) dx &= \int_1^2 \left[x^2 \log y \right]_{y=1}^{y=x} dx \\
 &= \int_1^2 x^2 (\log x - 0) dx \\
 &= \int_1^2 x^2 \log x dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{9} x^3 \right]_1^2 \\
 &= \frac{1}{3} (8 \log 2 - 1 \cdot 0) - \frac{1}{9} (8 - 1) \\
 &= \frac{8}{3} \log 2 - \frac{7}{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \log x \quad \frac{1}{3} x^3 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \frac{1}{x} \quad x^2
 \end{array}$$

点

$$\begin{aligned}
 (3) \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (2x + 3y^2) dy \right\} dx \\
 &= \int_0^1 \left[2xy + y^3 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
 &= \int_0^1 \{ 2x(1-x) + (1-x)^3 \} dx \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{6} (1-0)^3 + \left[-\frac{1}{4} (1-x)^4 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} (0 - 1) \\
 &= \frac{7}{12}
 \end{aligned}$$

点

$$\begin{aligned}
 (4) \int_{-1}^2 \left\{ \int_{-3}^{x^2} (3x + 2y) dy \right\} dx \\
 &= \int_{-1}^2 \left[3xy + y^2 \right]_{y=-3}^{y=x^2} dx \\
 &= \int_{-1}^2 \{ (3x^3 + x^4) - (-9x + 9) \} dx \\
 &= \int_{-1}^2 (x^4 + 3x^3 + 9x - 9) dx \\
 &= \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{3}{4} x^4 + \frac{9}{2} x^2 - 9x \right]_{-1}^2 \\
 &= \left(\frac{32}{5} + 12 + 18 - 18 \right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{4} + \frac{9}{2} - 9 \right) \\
 &= \frac{87}{20}
 \end{aligned}$$

点

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \left(\int_{\sin x}^x y \cos x dy \right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \left[\frac{1}{2} y^2 \cos x \right]_{y=\sin x}^{y=x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{2} (x^2 - \sin^2 x) \cos x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (x^2 \cos x - \sin^2 x \cdot \cos x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x) - \frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{4}{9} \pi^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \cdot 0 \right) + 2 \left\{ \frac{2}{3} \pi \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) - 0 \cdot 1 \right\} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - 0 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} \pi^2 - \frac{2}{3} \pi - \frac{9\sqrt{3}}{8} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{9} \pi^2 - \frac{\pi}{3} - \frac{9\sqrt{3}}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \int x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx \\
 \begin{array}{l} x^2 \searrow \sin x \\ 2x \nearrow \cos x \end{array} &= x^2 \sin x - 2 (-x \cos x + \int \cos x dx) \\
 &= x^2 \sin x - 2 (-x \cos x + \sin x) \\
 \begin{array}{l} x \searrow -\cos x \\ 1 \nearrow \sin x \end{array} &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left(\int_{-x^2}^x \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) dx \\
 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left[\arctan \frac{y}{x} \right]_{y=-x^2}^{y=x} dx \\
 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left\{ \frac{\pi}{4} - \arctan(-x) \right\} dx \\
 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left(\frac{\pi}{4} + \arctan x \right) dx \\
 &= \left[\frac{\pi}{4} x + \left\{ x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right\} \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \\
 &= \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(1 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} (\log 2 - \log \frac{4}{3}) \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{5}{12\sqrt{3}} \pi - \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \int \arctan x dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\
 \begin{array}{l} \arctan x \searrow x \\ \frac{1}{1+x^2} \nearrow 1 \end{array} &= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx \\
 &= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)
 \end{aligned}$$