

科目名	微積分学B演習 微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
試験 時間	70 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 (共通問題)							
平成 27 年 12 月 23 日 (水)		2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名		これは 1 枚目です)	

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

1 極座標変換により次の重積分を求めよ。

(1) $\int \int_D e^{x^2+y^2-3} dx dy$ ($D: x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$)

$= \iint_{D'} e^{r^2-3} \cdot r dr d\theta$ ($D': 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2$)

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \int_0^2 e^{r^2-3} \cdot 2r dr \right) d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} [e^{r^2-3}]_{r=0}^{r=2} d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e^3} \right) d\theta$

$= \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e^3} \right) [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{4} \left(e - \frac{1}{e^3} \right)$



(2) $\int \int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^3} dx dy$ ($D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0$)

$= \iint_{D'} \frac{1}{r^6} \cdot r dr d\theta$ ($D': 0 \leq \theta \leq \pi, 1 \leq r \leq 3$)

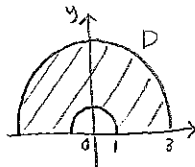
$= \int_0^{\pi} \left(\int_1^3 r^{-5} dr \right) d\theta$

$= \int_0^{\pi} \left[-\frac{1}{4} r^{-4} \right]_{r=1}^{r=3} d\theta$

$= \int_0^{\pi} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{81} - 1 \right) d\theta$

$= \frac{20}{81} [\theta]_0^{\pi}$

$= \frac{20}{81} \pi$



(3) $\int \int_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$ ($D: x^2 + y^2 \leq 1, y \geq -x, x \geq 0$)

$= \iint_{D'} \frac{1}{1+r^2} \cdot r dr d\theta$ ($D': -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1$)

$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2r}{1+r^2} dr \right) d\theta$

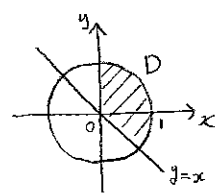
$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} [\log(1+r^2)]_{r=0}^{r=1} d\theta$

$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\log 2 - 0) d\theta$

$= \frac{1}{2} \log 2 \cdot [\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2} \log 2 \cdot \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right\}$

$= \frac{3}{8} \pi \log 2$



(4) $\int \int_D \frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ ($D: x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0$)

$= \iint_{D'} \frac{r \cos \theta}{1+r} \cdot r dr d\theta$ ($D': 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 3$)

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 \frac{r^2 \cos \theta}{r+1} dr \right) d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^3 \frac{(r^2-1)+1}{r+1} \cos \theta dr \right\} d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^3 \left(r-1 + \frac{1}{r+1} \right) \cos \theta dr \right\} d\theta$

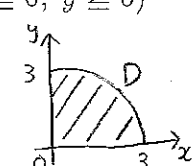
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{1}{2} r^2 - r + \log|r+1| \right) \cos \theta \right]_{r=0}^{r=3} d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{9}{2} - 3 + (\log 4 - 0) \right\} \cos \theta d\theta$

$= \left(\frac{3}{2} + 2 \log 2 \right) [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$

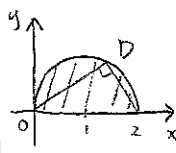
$= \left(\frac{3}{2} + 2 \log 2 \right) (1-0)$

$= \frac{3}{2} + 2 \log 2$



科目名	微積分学B演習 微積分学演習	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 27 年 12 月 23 日 (水)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	70 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 予記のみ参照・持込可 () これは 2 枚目です							

(5) $\int \int_D x^{\frac{3}{2}} dx dy$ ($D: x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0$)



$$= \iint_{D'} (r \cos \theta)^{\frac{3}{2}} \cdot r dr d\theta \quad (D': 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{2 \cos \theta} r^{\frac{5}{2}} (\cos \theta)^{\frac{3}{2}} dr \right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2}{7} r^{\frac{7}{2}} (\cos \theta)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{r=2 \cos \theta} d\theta$$

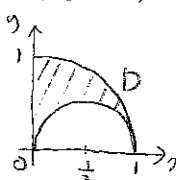
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{16\sqrt{2}}{7} \cos^5 \theta d\theta$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{7} \cdot \left(\frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} \cdot 1 \right)$$

$$= \frac{128\sqrt{2}}{105}$$

点

(6) $\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$ ($D: x \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$)



$$= \iint_{D'} r^2 \cdot r dr d\theta \quad (D': 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \cos \theta \leq r \leq 1)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos \theta}^1 r^3 dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=\cos \theta}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (1 - \cos^4 \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{5}{64} \pi$$

点

(7) $\int \int_D xy dx dy$ ($D: x \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$)

$$= \iint_{D'} r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r dr d\theta \quad (D': (6) \text{ と同じ })$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos \theta}^1 r^3 \cos \theta \sin \theta dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \cos \theta \sin \theta \right]_{r=\cos \theta}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (1 - \cos^4 \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ \sin \theta \cdot \cos \theta + \cos^5 \theta \cdot (-\sin \theta) \} d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{6} \cos^6 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} (1 - 0) + \frac{1}{6} (0 - 1) \right\}$$

$$= \frac{1}{12}$$

点

(8) $\int \int_D xy^2 dx dy$ ($D: x \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$)

$$= \iint_{D'} r \cos \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta \cdot r dr d\theta \quad (D': (6) \text{ と同じ })$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos \theta}^1 r^4 \cos \theta \sin^2 \theta dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^5}{5} \cos \theta \sin^2 \theta \right]_{r=\cos \theta}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5} (1 - \cos^5 \theta) \cos \theta \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta \sin^2 \theta - \cos^6 \theta \sin^2 \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ \sin^2 \theta \cdot \cos \theta - \cos^6 \theta + \cos^8 \theta \} d\theta$$

$$= \frac{1}{5} \left(\left[\frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{3} (1 - 0) - \frac{5}{256} \pi \right\}$$

$$= \frac{1}{15} - \frac{\pi}{256}$$

点

科目名	微積分学B演習 微積分学演習	対象	1OB-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
試験 時間	70 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							
平成 27 年 12 月 23 日 (水)		2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名		これは 3 枚目です)	

$$(9) \int \int_D \frac{y}{x} dx dy \quad (D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x)$$

$$= \iint_{D'} \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} \cdot r dr d\theta$$

$$(D': -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 1 \leq r \leq 2 \cos \theta)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^{2 \cos \theta} r \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} dr \right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^2}{2} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right]_{r=1}^{r=2 \cos \theta} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (4 \cos^2 \theta - 1) \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(4 \sin \theta \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(4 \sin \theta \cdot \cos \theta + \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[2 \sin^2 \theta + \log |\cos \theta| \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

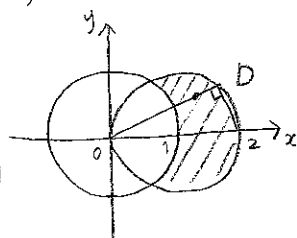
$$= \frac{1}{2} \left\{ 2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) + \left(\log \frac{1}{2} - \log \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$= 0$$

※ $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0$ でやるつもりが
入カミスしてしまいました。この場合の答えは

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \log 2$$

になります。



この問題は採点からはずします。

$$(10) \int \int_D xy dx dy \quad (D: x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x)$$

$$= \iint_{D'} r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r dr d\theta$$

$$(D': 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 1 \leq r \leq \frac{2}{\cos \theta})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^{\frac{2}{\cos \theta}} r^3 \cos \theta \sin \theta dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^4}{4} \cos \theta \sin \theta \right]_{r=1}^{r=\frac{2}{\cos \theta}} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} \left(\frac{16}{\cos^4 \theta} - 1 \right) \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{16 \sin \theta}{\cos^3 \theta} - \cos \theta \sin \theta \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ -16 (\cos \theta)^{-3} \cdot (-\sin \theta) - \sin \theta \cdot \cos \theta \right\} d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \left[-8 (\cos \theta)^{-2} - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ 8(2-1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) \right\}$$

$$= \frac{31}{16}$$

