

科目名	微積分学B 演習 微積分学演習	対 象	10B-B	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 27 年 10 月 8 日 (木) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	30 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 千記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

1 (1) $t = \sqrt{4x^2 - 7x + 9} + 2x$ と置換して
 $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 7x + 9}} dx$ を求めよ。

(2) $t = \sqrt{x^2 + 1} + x$ と置換して
 $\int \frac{9}{-4x + 3 + 5\sqrt{x^2 + 1}} dx$ を求めよ。

点

点

科目名	微積分学B 演習 微積分学演習	対象	10B-B	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
試験 時間	30 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照 持込可 ()							
平成 27 年 10 月 8 日 (木) 2 回目 (~ 時限目)		担当	石川 学		学年		氏名			

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

1 (1) $t = \sqrt{4x^2 - 7x + 9} + 2x$ と置換して

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 7x + 9}} dx \text{ を求めよ。}$$

$$t = \sqrt{4x^2 - 7x + 9} + 2x \text{ とおくと } t - 2x = \sqrt{4x^2 - 7x + 9}$$

両辺を2乗すると

$$t^2 - 4tx + 4x^2 = 4x^2 - 7x + 9 \quad \therefore x = \frac{t^2 - 9}{4t - 7}$$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot (4t - 7) - (t^2 - 9) \cdot 4}{(4t - 7)^2} = \frac{2(2t^2 - 7t + 18)}{(4t - 7)^2}$$

さらに

$$\sqrt{4x^2 - 7x + 9} = t - 2x = t - 2 \cdot \frac{t^2 - 9}{4t - 7} = \frac{2t^2 - 7t + 18}{4t - 7}$$

よって

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 7x + 9}} dx &= \int \frac{1}{\frac{t^2 - 9}{4t - 7} \cdot \frac{2(2t^2 - 7t + 18)}{(4t - 7)^2}} \cdot \frac{2(2t^2 - 7t + 18)}{(4t - 7)^2} dt \\ &= \int \frac{2}{t^2 - 9} dt \\ &= \int \frac{2}{(t - 3)(t + 3)} dt \\ &= \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t - 3} - \frac{1}{t + 3} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} (\log |t - 3| - \log |t + 3|) \\ &= \frac{1}{3} \log \left| \frac{t - 3}{t + 3} \right| \\ &= \frac{1}{3} \log \left| \frac{\sqrt{4x^2 - 7x + 9} + 2x - 3}{\sqrt{4x^2 - 7x + 9} + 2x + 3} \right| \end{aligned}$$

(2) $t = \sqrt{x^2 + 1} + x$ と置換して

$$\int \frac{9}{-4x + 3 + 5\sqrt{x^2 + 1}} dx \text{ を求めよ。}$$

$$t = \sqrt{x^2 + 1} + x \text{ とおくと } t - x = \sqrt{x^2 + 1}$$

両辺を2乗すると

$$t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + 1 \quad \therefore x = \frac{t^2 - 1}{2t} \left(= \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) = \frac{t^2 + 1}{2t^2}$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = t - x = t - \frac{t^2 - 1}{2t} = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

よって

$$\begin{aligned} \int \frac{9}{-4x + 3 + 5\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \int \frac{9}{-4 \cdot \frac{t^2 - 1}{2t} + 3 + 5 \cdot \frac{t^2 + 1}{2t}} \cdot \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt \\ &= \int \frac{9t^2 + 9}{t(t + 3)^2} dt \\ &= \int \left\{ \frac{1}{t} + \frac{8}{t + 3} - \frac{30}{(t + 3)^2} \right\} dt \\ &= \log |t| + 8 \log |t + 3| + \frac{30}{t + 3} \\ &= \log |\sqrt{x^2 + 1} + x| + 8 \log |\sqrt{x^2 + 1} + x + 3| \\ &\quad + \frac{30}{\sqrt{x^2 + 1} + x + 3} \end{aligned}$$

$$\ast \frac{9t^2 + 9}{t(t + 3)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t + 3} + \frac{C}{(t + 3)^2}$$

と分解の形を決め、から分母をばらうと

$$9t^2 + 9 = A(t + 3)^2 + Bt(t + 3) + Ct$$

$$9t^2 + 9 = (A + B)t^2 + (6A + 3B + C)t + 9A$$

$$\begin{cases} A + B = 9 \\ 6A + 3B + C = 0 \\ 9A = 9 \end{cases} \quad \therefore A = 1, B = 8, C = -30$$

点

点