

科目名	微積分学B演習 微積分学演習	対象	1OB-B	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成27年10月29日(木) 2回目 (~ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験 時間	45 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 予記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

1 次の広義積分を求めよ。

(1) $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(2) $\int_{-2}^{\infty} \frac{1}{(3x+10)(2x+7)} dx$

点

点

(3) $\int_{-1}^{\infty} x e^{-4x} dx$

(4) $\int_0^5 (x^2 - 2) \log x dx$

点

点

(5) $\int_0^{\infty} e^{-5x} \sin 3x dx$

(6) $\int_{-1}^{\infty} \frac{-x-2}{(x^2+3)(x^2-x+1)} dx$

点

点

科目名	微積分学B演習 微積分学演習	対象	10B-B	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成27年10月29日(木)	2回目 (～時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	45 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

① 次の広義積分を求めよ。

$$(1) \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1-\varepsilon} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\frac{1}{3} (\arcsin x)^3 \right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1-\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \{\arcsin(1-\varepsilon)\}^3 - \left(-\frac{\pi^3}{64}\right) \right\}$$

εあるから

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left\{ \{\arcsin(1-\varepsilon)\}^3 + \frac{\pi^3}{64} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^3}{64} \right)$$

$$= \frac{3}{64} \pi^3$$

$$(2) \int_{-2}^{\infty} \frac{1}{(3x+10)(2x+7)} dx$$

$$\int_{-2}^R \frac{1}{(3x+10)(2x+7)} dx = \int_{-2}^R \left(\frac{3}{3x+10} - \frac{2}{2x+7} \right) dx$$

$$= \left[\log(3x+10) - \log(2x+7) \right]_{-2}^R$$

$$= \left[\log \frac{3x+10}{2x+7} \right]_{-2}^R$$

$$= \log \frac{3R+10}{2R+7} - \log \frac{4}{3}$$

εあるから

$$\int_{-2}^{\infty} \frac{1}{(3x+10)(2x+7)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\log \frac{3 + \frac{10}{R}}{2 + \frac{7}{R}} - \log \frac{4}{3} \right)$$

$$= \log \frac{3}{2} - \log \frac{4}{3}$$

$$= \log \frac{9}{8}$$

$$\ast \frac{1}{(3x+10)(2x+7)} = \frac{A}{3x+10} + \frac{B}{2x+7} \quad \text{と設定}$$

$$(3) \int_{-1}^{\infty} x e^{-4x} dx$$

$$\int_{-1}^R x e^{-4x} dx = \left[-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right]_{-1}^R$$

$$= -\frac{1}{4} \{ R e^{-4R} - (-e^4) \} - \frac{1}{16} (e^{-4R} - e^4)$$

εあるから

$$\int_{-1}^R x e^{-4x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{4} (R e^{-4R} + e^4) - \frac{1}{16} (e^{-4R} - e^4) \right\}$$

$$= -\frac{1}{4} (0 + e^4) - \frac{1}{16} (0 - e^4)$$

$$= -\frac{3e^4}{16}$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{4x}} \ominus \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4e^{4x}} = 0$$

$$(4) \int_0^5 (x^2 - 2) \log x dx$$

$$\int_{\varepsilon}^5 (x^2 - 2) \log x dx$$

$$\begin{array}{ccc} \log x & \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} & \begin{array}{c} \frac{1}{3} x^3 - 2x \\ x^2 - 2 \end{array} \\ & \searrow \nearrow & \\ \frac{1}{x} & & \end{array}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3} x^3 - 2x \right) \log x - \left(\frac{1}{9} x^3 - 2x \right) \right]_{\varepsilon}^5$$

$$= \left\{ \frac{95}{3} \log 5 - \left(\frac{1}{3} \varepsilon^3 - 2\varepsilon \right) \log \varepsilon \right\} - \left\{ \frac{35}{9} - \left(\frac{1}{9} \varepsilon^3 - 2\varepsilon \right) \right\}$$

εあるから

$$\int_0^5 (x^2 - 2) \log x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{95}{3} \log 5 - \left(\frac{1}{3} \varepsilon^3 - 2 \right) \cdot \varepsilon \log \varepsilon - \frac{35}{9} + \left(\frac{1}{9} \varepsilon^3 - 2\varepsilon \right) \right\}$$

$$= \frac{95}{3} \log 5 - (-2) \cdot 0 - \frac{35}{9} + 0$$

$$= \frac{95}{3} \log 5 - \frac{35}{9}$$

※ $d > 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^d \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{x^{-d}} \ominus \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-d x^{-d-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^d}{-d} = 0$$

$$(5) \int_0^{\infty} e^{-5x} \sin 3x dx$$

$$\begin{array}{c} e^{-5x} \quad -\frac{1}{3} \cos 3x \\ \swarrow \quad \searrow \\ -5e^{-5x} \quad \sin 3x \end{array}$$

$$\int e^{-5x} \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{-5x} \cos 3x - \frac{5}{3} \int e^{-5x} \cos 3x dx$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-5x} \cos 3x$$

$$\begin{array}{c} e^{-5x} \quad \frac{1}{3} \sin 3x \\ \swarrow \quad \searrow \\ -5e^{-5x} \quad \cos 3x \end{array}$$

$$- \frac{5}{3} \left(\frac{1}{3} e^{-5x} \sin 3x + \frac{5}{3} \int e^{-5x} \sin 3x dx \right)$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-5x} \cos 3x - \frac{5}{9} e^{-5x} \sin 3x - \frac{25}{9} \int e^{-5x} \sin 3x dx$$

27 63 65

$$\frac{34}{9} \int e^{-5x} \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{-5x} \cos 3x - \frac{5}{9} e^{-5x} \sin 3x$$

$$\therefore \int e^{-5x} \sin 3x dx = -\frac{3}{34} e^{-5x} \cos 3x - \frac{5}{34} e^{-5x} \sin 3x$$

5.2

$$\int_0^R e^{-5x} \sin 3x dx = \left[-\frac{3}{34} e^{-5x} \cos 3x - \frac{5}{34} e^{-5x} \sin 3x \right]_0^R$$

$$= -\frac{3}{34} (e^{-5R} \cos 3R - 1 \cdot 1) - \frac{5}{34} (e^{-5R} \sin 3R - 1 \cdot 0)$$

17 63 2

$$\int_0^{\infty} e^{-5x} \sin 3x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{3}{34} (e^{-5R} \cos 3R - 1) - \frac{5}{34} e^{-5R} \sin 3R \right\}$$

$$= -\frac{3}{34} (0 - 1) - 0$$

$$= \frac{3}{34}$$

$$\ast |e^{-5x} \cos 3x| \leq e^{-5x}, |e^{-5x} \sin 3x| \leq e^{-5x}, \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-5x} = 0$$

27 63 65 から, は 27 63 65 の定理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-5x} \cos 3x = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-5x} \sin 3x = 0$$

$$(6) \int_{-1}^{\infty} \frac{-x-2}{(x^2+3)(x^2-x+1)} dx$$

$$\int \frac{-x-2}{(x^2+3)(x^2-x+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2+3} - \frac{1}{x^2-x+1} \right) dx$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + x^2} - \frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (x - \frac{1}{2})^2} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

27 63 65

$$\int_{-1}^R \frac{-x-2}{(x^2+3)(x^2-x+1)} dx = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]_{-1}^R$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \arctan \frac{R}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\}$$

$$- \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \arctan \frac{2R-1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\}$$

5.2

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{-x-2}{(x^2+3)(x^2-x+1)} dx$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{R}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2R-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\ast \frac{-x-2}{(x^2+3)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} \quad \text{と設定}$$