

科目名	微積分学B演習 微積分学演習	対象	10B-B	学部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学籍 番号		評 点
平成 27 年 12 月 3 日 (木) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	45 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

1 次の累次積分を求めよ。

(1) $\int_{\sqrt{e}}^{e^3} \left(\int_1^x \frac{1}{xy} dy \right) dx$

(2) $\int_1^2 \left(\int_1^x \frac{x^2}{y} dy \right) dx$

点

点

(3) $\int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (5x - 3y^2) dy \right\} dx$

(4) $\int_{-2}^1 \left\{ \int_{-1}^{x^2} (3x + 7y) dy \right\} dx$

点

点

$$(5) \int_0^{\frac{4}{3}\pi} \left(\int_{\sin x}^x y \cos x dy \right) dx$$

点

$$(6) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left(\int_{-x^2}^x \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) dx$$

点

科目名	微積分学B 演習 微積分学演習	対象	10B-B	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 27 年 12 月 3 日 (木)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	45 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

① 次の累次積分を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \int_{\sqrt{e}}^{e^3} \left(\int_1^x \frac{1}{xy} dy \right) dx &= \int_{\sqrt{e}}^{e^3} \left[\frac{\log y}{x} \right]_{y=1}^{y=x} dx \\
 &= \int_{\sqrt{e}}^{e^3} \frac{1}{x} (\log x - 0) dx \\
 &= \int_{\sqrt{e}}^{e^3} \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_{\sqrt{e}}^{e^3} \\
 &= \frac{1}{2} \left(9 - \frac{1}{4} \right) \\
 &= \frac{35}{8}
 \end{aligned}$$

点

$$\begin{aligned}
 (2) \int_1^2 \left(\int_1^x \frac{x^2}{y} dy \right) dx &= \int_1^2 \left[x^2 \log y \right]_{y=1}^{y=x} dx \\
 &= \int_1^2 x^2 (\log x - 0) dx \\
 &= \int_1^2 x^2 \log x dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{9} x^3 \right]_1^2 \\
 &= \frac{1}{3} (8 \log 2 - 1 \cdot 0) - \frac{1}{9} (8 - 1) \\
 &= \frac{8}{3} \log 2 - \frac{7}{9}
 \end{aligned}$$

点

$$\begin{aligned}
 (3) \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (5x - 3y^2) dy \right\} dx \\
 &= \int_0^1 \left[5xy - y^3 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
 &= \int_0^1 \{ 5x(1-x) - (1-x)^3 \} dx \\
 &= 5 \cdot \frac{1}{6} (1-0)^3 - \left[-\frac{1}{4} (1-x)^4 \right]_0^1 \\
 &= \frac{5}{6} + \frac{1}{4} (0 - 1) \\
 &= \frac{7}{12}
 \end{aligned}$$

点

$$\begin{aligned}
 (4) \int_{-2}^1 \left\{ \int_{-1}^{x^2} (3x + 7y) dy \right\} dx \\
 &= \int_{-2}^1 \left[3xy + \frac{7}{2} y^2 \right]_{y=-1}^{y=x^2} dx \\
 &= \int_{-2}^1 \left\{ (3x^3 + \frac{7}{2} x^4) - (-3x + \frac{7}{2}) \right\} dx \\
 &= \int_{-2}^1 \left(\frac{7}{2} x^4 + 3x^3 + 3x - \frac{7}{2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{7}{10} x^5 + \frac{3}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{7}{2} x \right]_{-2}^1 \\
 &= \left(\frac{7}{10} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \right) - \left(-\frac{112}{5} + 12 + 6 + 7 \right) \\
 &= -\frac{63}{20}
 \end{aligned}$$

点

$$\begin{array}{c}
 \log x \quad \swarrow \quad \searrow \quad \frac{1}{3} x^3 \\
 \frac{1}{x} \quad \quad \quad x^2
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \int_0^{\frac{4}{3}\pi} \left(\int_{\sin x}^x y \cos x dy \right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{4}{3}\pi} \left[\frac{1}{2} y^2 \cos x \right]_{y=\sin x}^{y=x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{4}{3}\pi} \frac{1}{2} (x^2 - \sin^2 x) \cos x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{4}{3}\pi} (x^2 \cos x - \sin^2 x \cdot \cos x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x) - \frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^{\frac{4}{3}\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{16}{9} \pi^2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0 \cdot 0 \right\} + 2 \left\{ \frac{4}{3} \pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 \cdot 1 \right\} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0 \right\} - \frac{1}{3} \left\{ \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right) - 0 \right\} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{8\sqrt{3}}{9} \pi^2 - \frac{4}{3} \pi + \frac{4\sqrt{3}}{8} \right) \\
 &= -\frac{4\sqrt{3}}{9} \pi^2 - \frac{2}{3} \pi + \frac{4\sqrt{3}}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \quad & \int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx \\
 & \begin{array}{l} x^2 \nearrow \sin x \\ 2x \nwarrow \cos x \end{array} \\
 &= x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \int \cos x dx \right) \\
 &= x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \sin x \right) \\
 & \begin{array}{l} x \nearrow -\cos x \\ 1 \nwarrow \sin x \end{array} \\
 &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left(\int_{-x^2}^x \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) dx \\
 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left[\arctan \frac{y}{x} \right]_{y=-x^2}^{y=x} dx \\
 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left\{ \frac{\pi}{4} - \arctan(-x) \right\} dx \\
 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left(\frac{\pi}{4} + \arctan x \right) dx \\
 &= \left[\frac{\pi}{4} x + \left\{ x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right\} \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \\
 &= \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(1 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} (\log 2 - \log \frac{4}{3}) \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{5}{12\sqrt{3}} \pi - \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \quad & \int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\
 & \begin{array}{l} \arctan x \nearrow x \\ \frac{1}{1+x^2} \nwarrow 1 \end{array} \\
 &= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx \\
 &= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)
 \end{aligned}$$