科目名	微積分学B 微積分学	対象	1OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号	
平成 29 年 11 月 13 日 (月)　　回目 (　～　時限目)				担当	石川　学	学年		氏名	
試験 時間	90 分	注意 事項	1. 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ (　　)						

評点

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします．

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません．

$\boxed{1}$ $f(x,y)=\dfrac{3}{2}x^2y+\dfrac{1}{6}y^3+3x^2+\dfrac{3}{2}y^2-3xy-6x+4y$

について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．答のみでよい．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

点

$\boxed{2}$ $\dfrac{5}{4}x^4+y^3-10x^2-2y^2-3y=0$ で定まる陰関数の極値を求めよ．

点

$\boxed{3}$ $\Gamma : x^4 + y^4 + 4x^2 + 4y^2 + 12xy = 16$ に制限した $x - y$ の最大値，最小値とそのときの (x, y) を求めよ．必要ならば，Γ が有界閉集合であることは用いてよい．

点

$\boxed{4}$ $\Gamma : x^2y + xy^2 + x^2y^2 = 3$ に制限した

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{2}y^2 - xy$$

が点 $(1, 1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

点

1. 開集合で定義された関数の極値
$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，f を O で C^2 級，$(a,b) \in O$ とする．

(1) $f(a,b)$ が（広義の）極値 $\implies$ $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$

※ $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) を f の**停留点**という．

(2) $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0 \implies f(a,b)$：（狭義の）極小値
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0 \implies f(a,b)$：（狭義の）極大値
$H(a,b)<0 \implies f(a,b)$：極値でない
ただし $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$ とする（H を f の **Hessian**（ヘッシアン）という）．

2. 陰関数の極値
$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，f を O で C^2 級，$(a,b) \in O$ とし，$f(a,b)=0,\ f_y(a,b) \neq 0$ をみたすとする．このとき，(a,b) の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数を $y=\varphi(x)$ とすると，次が成り立つ．

(1) $\varphi(a)(=b)$ が（広義の）極値 $\implies$ $f_x(a,b)=0$

(2) $f_x(a,b)=0$ のとき

・$\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)}>0 \implies \varphi(a)(=b)$ は（狭義の）極大値

・$\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)}<0 \implies \varphi(a)(=b)$ は（狭義の）極小値

3. Lagrange の未定乗数法
$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，f,g を O で C^1 級，

$$\Gamma = \{(x,y) \in O \mid g(x,y)=0\}$$

とする．$(a,b) \in \Gamma$ が

$$g_x(a,b) \neq 0 \quad \text{または} \quad g_y(a,b) \neq 0$$

をみたし，Γ に制限した f（これを $f|_\Gamma$ とかく）が (a,b) で極値をとるならば

$$\begin{cases} f_x(a,b)-\lambda g_x(a,b)=0 \\ f_y(a,b)-\lambda g_y(a,b)=0 \end{cases}$$

をみたす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する．

※ $g_x(a,b)=0$ かつ $g_y(a,b)=0$ をみたす $(a,b) \in \Gamma$ を，Γ の**特異点**という．よって，$f|_\Gamma$ が極値をとる点の候補は,「Γ の特異点」と「Lagrange の未定乗数法で求められる点」である．

4. 条件付き極値の判定法
$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，f,g を O で C^2 級，

$$\Gamma = \{(x,y) \in O \mid g(x,y)=0\}$$

とする．$(a,b) \in \Gamma$ が

$$g_x(a,b) \neq 0 \quad \text{または} \quad g_y(a,b) \neq 0$$

をみたし，ある $\lambda \in \mathbb{R}$ で

$$\begin{cases} f_x(a,b)-\lambda g_x(a,b)=0 \\ f_y(a,b)-\lambda g_y(a,b)=0 \end{cases}$$

が成り立っているとする．このとき

$$D(a,b)=\begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & f_{xx}(a,b)-\lambda g_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)-\lambda g_{xy}(a,b) \\ g_y(a,b) & f_{xy}(a,b)-\lambda g_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b)-\lambda g_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

とおくと

(1) $D(a,b)>0 \implies f(a,b)$ は $f|_\Gamma$ の極大値

(2) $D(a,b)<0 \implies f(a,b)$ は $f|_\Gamma$ の極小値

$\boxed{1}$ $f(x,y)=\dfrac{3}{2}x^2y+\dfrac{1}{6}y^3+3x^2+\dfrac{3}{2}y^2-3xy-6x+4y$

について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．**答のみでよい．**

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

解答

(1) $\begin{cases} f_x(x,y)=3xy+6x-3y-6=0 & \cdots\cdots① \\ f_y(x,y)=\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}y^2+3y-3x+4=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

① より

$$3x(y+2)-3(y+2)=0$$

$$3(y+2)(x-1)=0$$

$$\therefore \quad y=-2 \quad \text{または} \quad x=1$$

$y=-2$ のとき，② より

$$\frac{3}{2}x^2+2-6-3x+4=0$$

$$\frac{3}{2}x^2-3x=0$$

$$\frac{3}{2}x(x-2)=0$$

$$\therefore \quad x=0,2$$

$x=1$ のとき，② より

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}y^2+3y-3+4=0$$

$$\frac{1}{2}y^2+3y+\frac{5}{2}=0$$

$$\frac{1}{2}(y+1)(y+5)=0$$

$$\therefore \quad y=-1,-5$$

よって，停留点は　$(0,-2),\ (2,-2),\ (1,-1),\ (1,-5)$

(2) $f_{xx}(x,y)=3y+6,\ f_{yy}(x,y)=y+3,\ f_{xy}(x,y)=3x-3$

$H(x,y)=(3y+6)(y+3)-(3x-3)^2$

・$H(0,-2)=0\cdot 1-(-3)^2=-9<0 \qquad \therefore \quad f(0,-2)$：極値でない

・$H(2,-2)=0\cdot 1-3^2=-9<0 \qquad \therefore \quad f(2,-2)$：極値でない

・$H(1,-1)=3\cdot 2-0^2=6>0,\ f_{xx}(1,-1)=3>0 \qquad \therefore \quad f(1,-1)=-\dfrac{25}{6}$：極小値

・$H(1,-5)=(-9)\cdot(-2)-0^2=18>0,\ f_{xx}(1,-5)=-9<0 \qquad \therefore \quad f(1,-5)=\dfrac{7}{6}$：極大値

(
停留点に各 2 点
H の値に各 1 点
$H>0$ のときは，f_{xx} の値に各 1 点，極大か極小かを述べて各 1 点，f の値に各 1 点
$H<0$ のときは，極値でないと述べて各 1 点
合計 20 点
)

$\boxed{2}$ $\dfrac{5}{4}x^4+y^3-10x^2-2y^2-3y=0$ で定まる陰関数の極値を求めよ．

解答

$f(x,y)=\dfrac{5}{4}x^4+y^3-10x^2-2y^2-3y$ とおくと

$$f_x(x,y)=5x^3-20x,\ f_y(x,y)=3y^2-4y-3,\ f_{xx}(x,y)=15x^2-20$$

まず，$f(x,y)=0,\ f_x(x,y)=0$ をみたす (x,y) を求める．

$f_x(x,y)=0$ より　　$5x(x^2-4)=0$　　$\therefore$　$x=0,\pm 2$

$x=0$ のとき，$f(x,y)=0$ へ代入して

$$y^3-2y^2-3y=0$$

$$y(y+1)(y-3)=0$$

$$\therefore\quad y=0,-1,3$$

$x=\pm 2$ のとき，$f(x,y)=0$ へ代入して

$$20-40+y^3-2y^2-3y=0$$

$$y^3-2y^2-3y-20=0$$

$$(y-4)(y^2+2y+5)=0$$

$$\therefore\quad y=4$$

よって　　$(x,y)=(0,0),\ (0,-1),\ (0,3),\ (\pm 2,4)$

・$f_y(0,0)=-3\neq 0$ より，$(0,0)$ の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数が存在する．

$\dfrac{f_{xx}(0,0)}{f_y(0,0)}=\dfrac{-20}{-3}>0$ より　　$x=0$ のとき $y=0$ は極大値

・$f_y(0,-1)=4\neq 0$ より，$(0,-1)$ の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数が存在する．

$\dfrac{f_{xx}(0,-1)}{f_y(0,-1)}=\dfrac{-20}{4}<0$ より　　$x=0$ のとき $y=-1$ は極小値

・$f_y(0,3)=12\neq 0$ より，$(0,3)$ の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数が存在する．

$\dfrac{f_{xx}(0,3)}{f_y(0,3)}=\dfrac{-20}{12}<0$ より　　$x=0$ のとき $y=3$ は極小値

・$f_y(\pm 2,4)=29\neq 0$ より，$(\pm 2,4)$ の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数が存在する．

$\dfrac{f_{xx}(\pm 2,4)}{f_y(\pm 2,4)}=\dfrac{40}{29}>0$ より　　$x=\pm 2$ のとき $y=4$ は極大値

（$\dfrac{f_{xx}}{f_y}$ の値に各 1 点，極大か極小かを述べて各 1 点，y の値に各 1 点
合計 12 点）

$\boxed{3}$ $\Gamma: x^4+y^4+4x^2+4y^2+12xy=16$ に制限した $x-y$ の最大値，最小値とそのときの (x,y) を求めよ．必要ならば，Γ が有界閉集合であることは用いてよい．

解答

$f(x,y)=x-y,\ g(x,y)=x^4+y^4+4x^2+4y^2+12xy-16,\ \Gamma: g(x,y)=0$ とおくと

$$f_x(x,y)=1,\ f_y(x,y)=-1,\ g_x(x,y)=4x^3+8x+12y,\ g_y(x,y)=4y^3+8y+12x$$

である．

$g_x(x,y)=0,\ g_y(x,y)=0$ を解くと $(x,y)=(0,0),\ (\pm 1,\mp 1)$（複号同順）で，$(0,0),\ (\pm 1,\mp 1)\notin\Gamma$（複号同順）であるから，$f|_\Gamma$ が極値をとる点の候補は Lagrange の未定乗数法ですべて求められる．

また，Γ は有界閉集合で，f は連続であるから，Weierstrass の最大値定理より，$f|_\Gamma$ は最大値，最小値をもつ．そして，最大値，最小値はそれぞれ極大値，極小値となるから，最大値，最小値をとる点 (x,y) は Lagrange の未定乗数法より

$$\begin{cases} x^4+y^4+4x^2+4y^2+12xy=16 & \cdots\cdots① \\ 1-\lambda(4x^3+8x+12y)=0 & \cdots\cdots② \\ -1-\lambda(4y^3+8y+12x)=0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

の解である．

② と ③ より λ を消去すると

$$1\cdot(4y^3+8y+12x)-(-1)\cdot(4x^3+8x+12y)=0$$

$$4x^3+4y^3+20x+20y=0$$

$$x^3+y^3+5x+5y=0$$

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)+5(x+y)=0$$

$$(x+y)(x^2-xy+y^2+5)=0 \qquad \left(x^2-xy+y^2+5=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+5>0\right)$$

$\therefore \quad y=-x$

このとき，① より

$$x^4+x^4+4x^2+4x^2-12x^2=16$$

$$2x^4-4x^2-16=0$$

$$2(x^2+2)(x^2-4)=0$$

$\therefore \quad x=\pm 2$

よって　$(x,y)=(\pm 2,\mp 2)$　（複号同順）

このとき，関数値は

$$f(\pm 2,\mp 2)=\pm 4 \quad \text{（複号同順）}$$

で，異なる値は 2 つだけであるから，大きい方が最大値，小さい方が最小値となる．以上より

最大値　$f(2,-2)=4$，　最小値　$f(-2,2)=-4$

（$g_x=0,\ g_y=0$ の解 $(x,y)=(0,0),\ (\pm 1,\mp 1)$（複号同順）に各 1 点
①②③ の解 $(x,y)=(2,-2),\ (-2,2)$ に各 2 点，最大か最小かを述べて各 1 点，関数値に各 1 点
合計 10 点）

$\boxed{4}$ $\Gamma : x^2y+xy^2+x^2y^2=3$ に制限した

$$f(x,y)=x^3+y^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{2}y^2-xy$$

が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

解答

$f(x,y)=x^3+y^3-\dfrac{7}{2}x^2-\dfrac{7}{2}y^2-xy$ より

$$f_x(x,y)=3x^2-7x-y,\ f_y(x,y)=3y^2-7y-x$$

$$f_{xx}(x,y)=6x-7,\ f_{yy}(x,y)=6y-7,\ f_{xy}(x,y)=-1$$

また，$g(x,y)=x^2y+xy^2+x^2y^2-3$ とおくと

$$g_x(x,y)=2xy+y^2+2xy^2,\ g_y(x,y)=x^2+2xy+2x^2y$$

$$g_{xx}(x,y)=2y+2y^2,\ g_{yy}(x,y)=2x+2x^2,\ g_{xy}(x,y)=2x+2y+4xy$$

$(x,y)=(1,1)$ のとき

$$f_x=-5,\ f_y=-5,\ g_x=5,\ g_y=5$$

より，Lagrange の未定乗数 λ は $\lambda=-1$

さらに

$$f_{xx}-\lambda g_{xx}=(-1)-(-1)\cdot 4=3,\ f_{yy}-\lambda g_{yy}=(-1)-(-1)\cdot 4=3,\ f_{xy}-\lambda g_{xy}=(-1)-(-1)\cdot 8=7$$

であるから

$$D(1,1)=\begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix}=200>0$$

$\therefore \quad f(1,1)=-6$：極大値

（$\lambda=-1$ に 2 点，$D(1,1)$ の成分に 1 点〜 2 点
$D(1,1)$ の成分が正しい場合，$D(1,1)$ の値に 2 点，極大か極小かを述べて 1 点，関数値に 1 点
合計 8 点）