科目名	微積分学 B 微積分学	対象	1OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 30 年 11 月 12 日 (月)　回目 (　～　時限目)				担当	石川　学	学年		氏名		
試験 時間	90 分	注意 事項	1. 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ (　　)							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします．

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません．

$\boxed{1}$ $f(x,y) = 2x^2y + \dfrac{1}{2}y^3 + 4x^2 + \dfrac{9}{2}y^2 - 6xy - 12x + 12y$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．答のみでよい．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

点

$\boxed{2}$ $f(x,y) = x^4 - 4x^3 - 2y^3 + 4x^2 - 3y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $f(x,y) = 0$ の特異点を求めよ．

(2) (1) で求めた特異点以外の $f(x,y) = 0$ で定まる陰関数の極値を求めよ．

点

$\boxed{3}$ $\Gamma : x^2 + 3y^4 + 2xy = 6$ に制限した $2x - 3y$ の最大値，最小値とそのときの (x, y) を求めよ．必要ならば，Γ が有界閉集合であることは用いてよい．

点

$\boxed{4}$ $\Gamma : x^3y^2 + x^2y^3 - x^2y^2 = 1$ に制限した

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - \frac{7}{4}x^2 - \frac{7}{4}y^2 - \frac{5}{2}xy$$

が点 $(1, 1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

点

開集合で定義された関数の極値

$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，f を O で C^2 級，$(a,b) \in O$ とする．

(1) $f(a,b)$ が（広義の）極値 $\quad\Longrightarrow\quad f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$

※ $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) を f の**停留点**という．

(2) $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ のとき
・$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0 \quad\Longrightarrow\quad f(a,b)$：（狭義の）極小値
・$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0 \quad\Longrightarrow\quad f(a,b)$：（狭義の）極大値
・$H(a,b)<0 \quad\Longrightarrow\quad f(a,b)$：極値でない
ただし $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$ とする（H を f の **Hessian**（ヘッシアン）という）．

陰関数の極値

$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，f を O で C^2 級，$(a,b) \in O$ とし，$f(a,b)=0,\ f_y(a,b) \neq 0$ をみたすとする．このとき，(a,b) の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数を $y=\varphi(x)$ とすると，次が成り立つ．

(1) $\varphi(a)(=b)$ が（広義の）極値 $\quad\Longrightarrow\quad f_x(a,b)=0$

(2) $f_x(a,b)=0$ のとき

・$\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)}>0 \quad\Longrightarrow\quad \varphi(a)(=b)$ は（狭義の）極大値

・$\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)}<0 \quad\Longrightarrow\quad \varphi(a)(=b)$ は（狭義の）極小値

Lagrange の未定乗数法，条件付き極値の判定法

$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，f,g を O で C^2 級，$\Gamma=\{(x,y)\in O \mid g(x,y)=0\}$ とし，$(a,b)\in\Gamma$ が

$$g_x(a,b)\neq 0 \quad \text{または} \quad g_y(a,b)\neq 0$$

をみたすとする．

(1) Γ に制限した f（これを $f|_\Gamma$ とかく）が (a,b) で（広義の）極値をとるならば

$$\begin{cases} f_x(a,b)-\lambda g_x(a,b)=0 \\ f_y(a,b)-\lambda g_y(a,b)=0 \end{cases}$$

をみたす $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在する．

(2) (1) の λ を用いて

$$D(a,b)=\begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & f_{xx}(a,b)-\lambda g_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)-\lambda g_{xy}(a,b) \\ g_y(a,b) & f_{xy}(a,b)-\lambda g_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b)-\lambda g_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

とおくとき

・$D(a,b)>0 \quad\Longrightarrow\quad f(a,b)$ は $f|_\Gamma$ の（狭義の）極大値

・$D(a,b)<0 \quad\Longrightarrow\quad f(a,b)$ は $f|_\Gamma$ の（狭義の）極小値

※ $g_x(a,b)=0$ かつ $g_y(a,b)=0$ をみたす $(a,b)\in\Gamma$ を，Γ の**特異点**という．よって，$f|_\Gamma$ が極値をとる点の候補は，「Γ の特異点」と「Lagrange の未定乗数法で求められる点」である．

$\boxed{1}$ $f(x,y) = 2x^2y + \dfrac{1}{2}y^3 + 4x^2 + \dfrac{9}{2}y^2 - 6xy - 12x + 12y$

について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．**答のみでよい．**

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

解答

(1) $\begin{cases} f_x(x,y) = 4xy + 8x - 6y - 12 = 0 & \cdots\cdots① \\ f_y(x,y) = 2x^2 + \dfrac{3}{2}y^2 + 9y - 6x + 12 = 0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

① より

$$4x(y+2) - 6(y+2) = 0$$

$$2(y+2)(2x-3) = 0$$

$$\therefore \quad y = -2 \quad \text{または} \quad x = \frac{3}{2}$$

$y = -2$ のとき，② より

$$2x^2 + 6 - 18 - 6x + 12 = 0$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x-3) = 0$$

$$\therefore \quad x = 0, 3$$

$x = \dfrac{3}{2}$ のとき，② より

$$\frac{9}{2} + \frac{3}{2}y^2 + 9y - 9 + 12 = 0$$

$$\frac{3}{2}y^2 + 9y + \frac{15}{2} = 0$$

$$\frac{3}{2}(y+1)(y+5) = 0$$

$$\therefore \quad y = -1, -5$$

よって，停留点は　$(0,-2),\ (3,-2),\ \left(\dfrac{3}{2}, -1\right),\ \left(\dfrac{3}{2}, -5\right)$

(2) $f_{xx}(x,y) = 4y + 8,\ f_{yy}(x,y) = 3y + 9,\ f_{xy}(x,y) = 4x - 6$

$H(x,y) = (4y+8)(3y+9) - (4x-6)^2$

・$H(0,-2) = 0 \cdot 3 - (-6)^2 = -36 < 0 \qquad \therefore \quad f(0,-2)$：極値でない

・$H(3,-2) = 0 \cdot 3 - 6^2 = -36 < 0 \qquad \therefore \quad f(3,-2)$：極値でない

・$H\left(\dfrac{3}{2}, -1\right) = 4 \cdot 6 - 0^2 = 24 > 0,\ f_{xx}\left(\dfrac{3}{2}, -1\right) = 4 > 0 \qquad \therefore \quad f\left(\dfrac{3}{2}, -1\right) = -\dfrac{25}{2}$：極小値

・$H\left(\dfrac{3}{2}, -5\right) = (-12) \cdot (-6) - 0^2 = 72 > 0,\ f_{xx}\left(\dfrac{3}{2}, -5\right) = -12 < 0 \qquad \therefore \quad f\left(\dfrac{3}{2}, -5\right) = \dfrac{7}{2}$：極大値

(
停留点に各 2 点
H の値に各 1 点
$H > 0$ のときは，f_{xx} の値に各 1 点，極大か極小かを述べて各 1 点，f の値に各 1 点
$H < 0$ のときは，極値でないと述べて各 1 点
合計 20 点
)

$\boxed{2}$ $f(x,y) = x^4 - 4x^3 - 2y^3 + 4x^2 - 3y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $f(x,y) = 0$ の特異点を求めよ．

(2) (1) で求めた特異点以外の $f(x,y) = 0$ で定まる陰関数の極値を求めよ．

解答

$f(x,y)=x^4-4x^3-2y^3+4x^2-3y^2$ より

$$f_x(x,y)=4x^3-12x^2+8x=0,\ f_y(x,y)=-6y^2-6y,\ f_{xx}(x,y)=12x^2-24x+8$$

まず，$f(x,y)=0,\ f_x(x,y)=0$ をみたす (x,y) を求める．

$f_x(x,y)=0$ より　　$4x(x-1)(x-2)=0$　　$\therefore$　$x=0,1,2$

$x=0$ のとき，$f(x,y)=0$ へ代入して

$$-2y^3-3^2y=0$$

$$-y^2(2y+3)=0$$

$$\therefore\quad y=0,-\frac{3}{2}$$

$x=1$ のとき，$f(x,y)=0$ へ代入して

$$1-4-2y^3+4-3y^2=0$$

$$2y^3+3y^2-1=0$$

$$(y+1)^2(2y-1)=0$$

$$\therefore\quad y=-1,\frac{1}{2}$$

$x=2$ のとき，$f(x,y)=0$ へ代入して

$$16-32-2y^3+16-3y^2=0$$

$$2y^3+3y^2=0$$

$$y^2(2y+3)=0$$

$$\therefore\quad y=0,-\frac{3}{2}$$

よって，$f(x,y)=0,\ f_x(x,y)=0$ をみたす (x,y) は

$$(x,y)=(0,0),\ \left(0,-\frac{3}{2}\right),\ (1,-1),\ \left(1,\frac{1}{2}\right),\ (2,0),\ \left(2,-\frac{3}{2}\right)\quad\cdots\cdots①$$

(1) ① のうち，$f_y(x,y)=0$ すなわち $y=0,-1$ もみたすものが曲線 $f(x,y)=0$ の特異点である．

よって　　$(0,0),\ (1,-1),\ (2,0)$

(2) ① のうち，(1) の答え以外の

$$(x,y)=\left(0,-\frac{3}{2}\right),\ \left(1,\frac{1}{2}\right),\ \left(2,-\frac{3}{2}\right)$$

について考える．

・$f_y\left(0,-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{2}\neq 0$ より，$\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数が存在する．

$$\frac{f_{xx}\left(0,-\frac{3}{2}\right)}{f_y\left(0,-\frac{3}{2}\right)}=\frac{8}{-\frac{9}{2}}=-\frac{16}{9}<0$$ より　　$x=0$ のとき $y=-\frac{3}{2}$ は極小値

・$f_y\left(1,\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}\neq 0$ より，$\left(1,\frac{1}{2}\right)$ の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数が存在する．

$$\frac{f_{xx}\left(1,\frac{1}{2}\right)}{f_y\left(1,\frac{1}{2}\right)}=\frac{-4}{-\frac{9}{2}}=\frac{8}{9}>0$$ より　　$x=1$ のとき $y=\frac{1}{2}$ は極大値

・$f_y\left(2,-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{2}\neq 0$ より，$\left(2,-\frac{3}{2}\right)$ の近傍で $f(x,y)=0$ が定める陰関数が存在する．

$$\frac{f_{xx}\left(2,-\frac{3}{2}\right)}{f_y\left(2,-\frac{3}{2}\right)}=\frac{8}{-\frac{9}{2}}=-\frac{16}{9}<0$$ より　　$x=2$ のとき $y=-\frac{3}{2}$ は極小値

$$\left(\begin{array}{l}\text{特異点に各 1 点}\\ \dfrac{f_{xx}}{f_y}\ \text{の値に各 1 点，極大か極小かを述べて各 1 点，}y\ \text{の値に各 1 点}\\ \text{合計 12 点}\end{array}\right)$$

$\boxed{3}$ $\Gamma : x^2+3y^4+2xy=6$ に制限した $2x-3y$ の最大値，最小値とそのときの (x,y) を求めよ．必要ならば，Γ が有界閉集合であることは用いてよい．

解答

$f(x,y)=2x-3y,\ g(x,y)=x^2+3y^4+2xy-6,\ \Gamma : g(x,y)=0$ とおくと

$$f_x(x,y)=2,\ f_y(x,y)=-3,\ g_x(x,y)=2x+2y,\ g_y(x,y)=12y^3+2x$$

である．

$g_x(x,y)=0,\ g_y(x,y)=0$ を解くと $(x,y)=(0,0),\ \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$（複号同順）で，$(0,0),\ \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\notin\Gamma$（複号同順）であるから，$f|_\Gamma$ が極値をとる点の候補は Lagrange の未定乗数法ですべて求められる．

また，Γ は有界閉集合で，f は連続であるから，Weierstrass の最大値定理より，$f|_\Gamma$ は最大値，最小値をもつ．そして，最大値，最小値はそれぞれ極大値，極小値となるから，最大値，最小値をとる点 (x,y) は Lagrange の未定乗数法より

$$\begin{cases} x^2+3y^4+2xy=6 & \cdots\cdots① \\ 2-\lambda(2x+2y)=0 & \cdots\cdots② \\ -3-\lambda(12y^3+2x)=0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

の解である．

② と ③ より λ を消去すると

$$2\cdot(12y^3+2x)-(-3)\cdot(2x+2y)=0$$

$$\therefore\quad x=-\frac{12y^3+3y}{5}\quad\cdots\cdots④$$

④ を ① へ代入すると

$$\frac{144y^6+72y^4+9y^2}{25}+3y^4-\frac{24y^4+6y^2}{5}=6$$

$$\frac{48y^6+24y^4+3y^2}{25}+y^4-\frac{8y^4+2y^2}{5}=2$$

$$(48y^6+24y^4+3y^2)+25y^4-(40y^4+10y^2)=50$$

$$48y^6+9y^4-7y^2-50=0$$

$$(y^2-1)(48y^4+57y^2+50)=0$$

$y\in\mathbb{R}$ のとき $y^2\geqq 0$ であるから　$y^2=1$　$\therefore\quad y=\pm1$

よって，④ より　$(x,y)=(\mp3,\pm1)$　（複号同順）

このとき，関数値は

$$f(\mp3,\pm1)=\mp9\quad\text{（複号同順）}$$

で，異なる値は 2 つだけであるから，大きい方が最大値，小さい方が最小値となる．以上より

最大値　$f(3,-1)=9$，　最小値　$f(-3,1)=-9$

$$\left(\begin{array}{l} g_x=0,\ g_y=0\ \text{の解}\ (x,y)=(0,0),\ \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\text{（複号同順）に各 1 点}\\ \text{①②③ の解}\ (x,y)=(3,-1),\ (-3,1)\ \text{に各 2 点，最大か最小かを述べて各 1 点，関数値に各 1 点}\\ \text{合計 10 点}\end{array}\right)$$

$\boxed{4}$ $\Gamma : x^3y^2+x^2y^3-x^2y^2=1$ に制限した

$$f(x,y)=x^3+y^3-\frac{7}{4}x^2-\frac{7}{4}y^2-\frac{5}{2}xy$$

が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

解答

$f(x,y) = x^3 + y^3 - \dfrac{7}{4}x^2 - \dfrac{7}{4}y^2 - \dfrac{5}{2}xy$ より

$$f_x(x,y) = 3x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{5}{2}y,\ f_y(x,y) = 3y^2 - \frac{7}{2}y - \frac{5}{2}x$$

$$f_{xx}(x,y) = 6x - \frac{7}{2},\ f_{yy}(x,y) = 6y - \frac{7}{2},\ f_{xy}(x,y) = -\frac{5}{2}$$

また，$g(x,y) = x^3y^2 + x^2y^3 - x^2y^2 - 1$ とおくと

$$g_x(x,y) = 3x^2y^2 + 2xy^3 - 2xy^2,\ g_y(x,y) = 2x^3y + 3x^2y^2 - 2x^2y$$

$$g_{xx}(x,y) = 6xy^2 + 2y^3 - 2y^2,\ g_{yy}(x,y) = 2x^3 + 6x^2y - 2x^2,\ g_{xy}(x,y) = 6x^2y + 6xy^2 - 4xy$$

$(x,y) = (1,1)$ のとき

$$f_x = -3,\ f_y = -3,\ g_x = 3,\ g_y = 3$$

より，Lagrange の未定乗数 λ は $\lambda = -1$

さらに

$$f_{xx} - \lambda g_{xx} = \frac{5}{2} - (-1)\cdot 6 = \frac{17}{2},\ f_{yy} - \lambda g_{yy} = \frac{5}{2} - (-1)\cdot 6 = \frac{17}{2},\ f_{xy} - \lambda g_{xy} = \left(-\frac{5}{2}\right) - (-1)\cdot 8 = \frac{11}{2}$$

であるから

$$D(1,1) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & \dfrac{17}{2} & \dfrac{11}{2} \\ 3 & \dfrac{11}{2} & \dfrac{17}{2} \end{vmatrix} = -54 < 0$$

$\therefore \quad f(1,1) = -4$：極小値

（$\lambda = -1$ に 2 点，$D(1,1)$ の成分に 1 点～ 2 点
$D(1,1)$ の成分が正しい場合，$D(1,1)$ の値に 2 点，極大か極小かを述べて 1 点，関数値に 1 点
合計 8 点）