科目名	微積分学 B 微積分学	対 象	1OB-AB	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号	
平成 31 年 1 月 21 日 (月) 1 回目 (～ 時限目)				担 当	石川　学	学 年		氏 名	
試 験 時 間	60 分	注 意 事 項	1. 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )						

評 点

平成 30 年度後期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 次の積分を求めよ.　　（80 点）

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_{2x-1}^{x^2}(10x-6y)dy\right\}dx$

(2) $\displaystyle\int_{e}^{e^4}\left(\int_{1}^{x}\frac{\sqrt{\log x}}{xy}dy\right)dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{3}\left(\int_{-x}^{2x}xe^{y}dy\right)dx$

(4) $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(\int_{1}^{x}\log\frac{x^5}{y^2}dy\right)dx$

(5) $\displaystyle\int_{0}^{2}\left(\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2}}xye^{-y^6}dy\right)dx$　（順序変更）

(6) $\displaystyle\int\int_{D}\frac{y^3}{x^6}dxdy \quad \left(D: 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x\right)$

(7) $\displaystyle\int\int_{D}y(9x-4y)dxdy \quad \left(D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right)$

計算に必要なもの（抜粋）

(1) 部分積分

(2) 置換積分

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|$$

$$\int f(x)^{\alpha} \cdot f'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}f(x)^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)}$$

(3) 公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ \dfrac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 1}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n=2,4,6,\ldots) \\ \dfrac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 2}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3}\cdot 1 & (n=3,5,7,\ldots) \end{cases}$$

$\boxed{1}$ 次の積分を求めよ． （80 点）

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_{2x-1}^{x^2}(10x-6y)dy\right\}dx$

(2) $\displaystyle\int_{e}^{e^4}\left(\int_{1}^{x}\frac{\sqrt{\log x}}{xy}dy\right)dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{3}\left(\int_{-x}^{2x}xe^{y}dy\right)dx$

(4) $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(\int_{1}^{x}\log\frac{x^5}{y^2}dy\right)dx$

(5) $\displaystyle\int_{0}^{2}\left(\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2}}xye^{-y^6}dy\right)dx$ （順序変更）

(6) $\displaystyle\int\int_{D}\frac{y^3}{x^6}dxdy \quad \left(D: 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x\right)$

(7) $\displaystyle\int\int_{D}y(9x-4y)dxdy \quad \left(D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right)$

★減点ポイント

(1) 答えの符号ミス → 各 2 点減点

(2) 約分忘れ → 各 1 点減点

(3) まとめ不足やミス → その程度により 1 点〜 5 点減点

解答

$$(1)\quad \int_{-1}^{2}\left\{\int_{2x-1}^{x^2}(10x-6y)dy\right\}dx = \int_{-1}^{2}\Big[10xy-3y^2\Big]_{y=2x-1}^{y=x^2}dx$$
$$= \int_{-1}^{2}\Big[(10x^3-3x^4)-\{10x(2x-1)-3(2x-1)^2\}\Big]dx$$
$$= \int_{-1}^{2}(-3x^4+10x^3-8x^2-2x+3)dx$$
$$= \left[-\frac{3}{5}x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{8}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left(-\frac{96}{5}+40-\frac{64}{3}-4+6\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{5}{2}+\frac{8}{3}-1-3\right)$$
$$= -\frac{3}{10} \qquad \text{（10 点）}$$

$$(2)\quad \int_{e}^{e^4}\left(\int_{1}^{x}\frac{\sqrt{\log x}}{xy}dy\right)dx = \int_{e}^{e^4}\left[\frac{\sqrt{\log x}}{x}\log y\right]_{y=1}^{y=x}dx$$
$$= \int_{e}^{e^4}\frac{\sqrt{\log x}}{x}(\log x-0)dx$$
$$= \int_{e}^{e^4}(\log x)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$= \left[\frac{2}{5}(\log x)^{\frac{5}{2}}\right]_{e}^{e^4}$$
$$= \frac{2}{5}(32-1)$$
$$= \frac{62}{5} \qquad \text{（10 点）}$$

$$(3)\quad \int_{0}^{3}\left(\int_{-x}^{2x}xe^y dy\right)dx = \int_{0}^{3}\Big[xe^y\Big]_{y=-x}^{y=2x}dx$$
$$= \int_{0}^{3}(xe^{2x}-xe^{-x})dx$$
$$= \left[\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\right)-(-xe^{-x}-e^{-x})\right]_{0}^{3}$$
$$= \frac{1}{2}(3e^6-0\cdot 1)-\frac{1}{4}(e^6-1)+(3e^{-3}-0\cdot 1)+(e^{-3}-1)$$
$$= \frac{5e^6}{4}+\frac{4}{e^3}-\frac{3}{4} \qquad \text{（順に 4 点, 4 点, 2 点）}$$

(4) $$\int_1^2 \left(\int_1^x \log \frac{x^5}{y^2} dy\right) dx = \int_1^2 \left\{\int_1^x (5\log x - 2\log y) dy\right\} dx$$
$$= \int_1^2 \Big[5y\log x - 2(y\log y - y)\Big]_{y=1}^{y=x} dx$$
$$= \int_1^2 \{5(x-1)\log x - 2(x\log x - 1\cdot 0) + 2(x-1)\} dx$$
$$= \int_1^2 \{3x\log x - 5\log x + 2(x-1)\} dx$$
$$= \left[3\left(\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2\right) - 5(x\log x - x) + (x-1)^2\right]_1^2$$
$$= \frac{3}{2}(4\log 2 - 1\cdot 0) - \frac{3}{4}(4-1) - 5(2\log 2 - 1\cdot 0) + 5(2-1) + (1-0)$$
$$= \frac{15}{4} - 4\log 2$$
（順に 5 点，5 点）

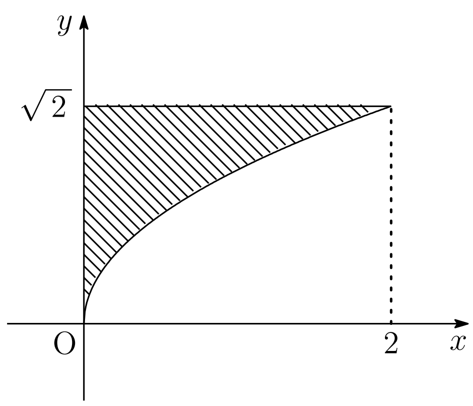
(5) 積分領域は

$D : 0 \leqq x \leqq 2,\ \sqrt{x} \leqq y \leqq \sqrt{2}$

であるが，これは

$D : 0 \leqq y \leqq \sqrt{2},\ 0 \leqq x \leqq y^2$

でもあるから



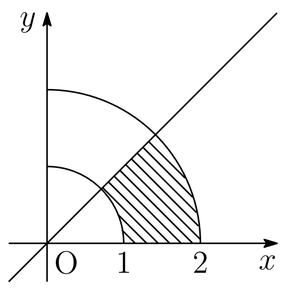
$$\int_0^2 \left(\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2}} xye^{-y^6} dy\right) dx = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{y^2} xye^{-y^6} dx\right) dy$$

（順序変更が正しくできて 3 点
順序変更が正しくない場合，
これ以降は見ない）

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}x^2ye^{-y^6}\right]_{x=0}^{x=y^2} dy$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}y^5e^{-y^6} dy$$
$$= -\frac{1}{12}\int_0^{\sqrt{2}} e^{-y^6}\cdot(-6y^5) dy$$
$$= -\frac{1}{12}\Big[e^{-y^6}\Big]_0^{\sqrt{2}}$$
$$= -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{e^8} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{e^8}\right)$$
（7 点）

(6) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \begin{pmatrix} r \geqq 0 \\ \theta : 1 \text{ 周分} \end{pmatrix}$ とおくと

$$\int\int_D \frac{y^3}{x^6}dxdy \quad \left(D : 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x\right)$$



$$= \int\int_{D'} \frac{r^3\sin^3\theta}{r^6\cos^6\theta}\cdot rdrd\theta \quad \left(D' : 1 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\int_1^2 \frac{1}{r^2}dr\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3\theta}{\cos^6\theta}d\theta\right)$$

$$= \left[-\frac{1}{r}\right]_1^2 \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^2\theta)\sin\theta}{\cos^6\theta}d\theta$$

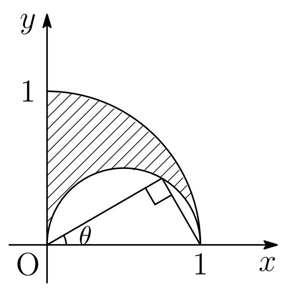
$$= -\left(\frac{1}{2}-1\right) \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{-(\cos\theta)^{-6}\cdot(-\sin\theta) + (\cos\theta)^{-4}\cdot(-\sin\theta)\right\}d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{5}(\cos\theta)^{-5} - \frac{1}{3}(\cos\theta)^{-3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}(4\sqrt{2}-1) - \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\right\}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{15}$$ （順に 7 点，8 点）

(7) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \begin{pmatrix} r \geqq 0 \\ \theta : 1 \text{ 周分} \end{pmatrix}$ とおくと



$$\int\int_D y(9x-4y)dxdy \quad \left(D : x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right)$$

$$= \int\int_{D'} r\sin\theta(9r\cos\theta - 4r\sin\theta)\cdot rdrd\theta \quad \left(D' : 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leqq r \leqq 1\right)$$

$$= \int\int_{D'} r^3\sin\theta(9\cos\theta - 4\sin\theta)drd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_{\cos\theta}^1 r^3\sin\theta(9\cos\theta-4\sin\theta)dr\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}r^4\sin\theta(9\cos\theta-4\sin\theta)\right]_{r=\cos\theta}^{r=1}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(1-\cos^4\theta)\sin\theta(9\cos\theta-4\sin\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{9(\cos\theta\sin\theta - \cos^5\theta\sin\theta) - 4(\sin^2\theta - \cos^4\theta\sin^2\theta)\}d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[9\{-\cos\theta\cdot(-\sin\theta) + \cos^5\theta\cdot(-\sin\theta)\} - 4(\sin^2\theta - \cos^4\theta + \cos^6\theta)\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left\{9\left[-\frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{6}\cos^6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left[9\left\{-\frac{1}{2}(0-1) + \frac{1}{6}(0-1)\right\} - \frac{7}{8}\pi\right]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{7}{32}\pi$$ （順に 7 点，8 点）