科目名	微積分学 A 微積分学	対 象	1OB-AB	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号	
平成 30 年 7 月 30 日 (月) 1 回目 (～ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名	
試 験 時 間	60 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )						

評 点

平成 30 年度前期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C の値を求めよ．**(1) は答えのみでよい．**

$$\frac{-3x^2+23x-34}{(x+3)(x^2-2x+11)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+11}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{-3x^2+23x-34}{(x+3)(x^2-2x+11)}dx$ を求めよ．

$\boxed{2}$ $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{5\sin x + 3\cos x + 13}{(1-\cos x)(5\sin x + 7\cos x + 9)}dx$ を求めよ．

$\boxed{3}$ $\sqrt{4x^2-x+7} + 2x = t$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{5}{(x+2)\sqrt{4x^2-x+7}}dx$ を求めよ．

$\boxed{4}$ 次を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{(\arctan x)^3(1+x^2)}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x\arcsin x dx$

$\boxed{5}$ 次を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log(x^2+x+1)}{x^2}dx$

★答えの符号ミス　→　各 2 点減点
★絶対値忘れ　→　各 1 点減点
★約分忘れ　→　各 1 点減点
★まとめ不足やミス　→　その程度により 1 点〜 5 点減点

$\boxed{1}$　(1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C の値を求めよ．**(1) は答えのみでよい．**

$$\frac{-3x^2+23x-34}{(x+3)(x^2-2x+11)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+11}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{-3x^2+23x-34}{(x+3)(x^2-2x+11)}dx$ を求めよ．

解答

(1) $\displaystyle\frac{-3x^2+23x-34}{(x+3)(x^2-2x+11)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+11}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-3x^2+23x-34 = A(x^2-2x+11)+(Bx+C)(x+3)$　……①

$x=-3$ を代入　$-130 = 26A$　$\therefore$　$A=-5$　（3 点）

$x=0$ を代入　$-34 = 11A+3C$
$-34 = -55+3C$　$\therefore$　$C=7$　（3 点）

$x=1$ を代入　$-14 = 10A+4(B+C)$
$-14 = -50+4(B+7)$　$\therefore$　$B=2$　（3 点）

※ ① の右辺を展開すると

$-3x^2+23x-34 = (A+B)x^2+(-2A+3B+C)x+11A+3C$

係数比較して

$$\begin{cases} A+B=-3 \\ -2A+3B+C=23 \\ 11A+3C=-34 \end{cases} \quad \therefore \quad A=-5,\ B=2,\ C=7$$

(2)
$$\begin{aligned}
\int \frac{-3x^2+23x-34}{(x+3)(x^2-2x+11)}dx &= \int \left(-\frac{5}{x+3} + \frac{2x+7}{x^2-2x+11}\right)dx \\
&= \int \left\{-\frac{5}{x+3} + \frac{(2x-2)+9}{x^2-2x+11}\right\}dx \\
&= \int \left\{-\frac{5}{x+3} + \frac{2x-2}{x^2-2x+11} + \frac{9}{(\sqrt{10})^2+(x-1)^2}\right\}dx \\
&= -5\log|x+4| + \log(x^2-2x+11) + \frac{9}{\sqrt{10}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{10}}
\end{aligned}$$

（順に 3 点，3 点，5 点）

$\boxed{2}$ $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくことにより，$\displaystyle\int\frac{5\sin x+3\cos x+13}{(1-\cos x)(5\sin x+7\cos x+9)}dx$ を求めよ．

解答

$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\int\frac{5\sin x+3\cos x+13}{(1-\cos x)(5\sin x+7\cos x+9)}dx &= \int\frac{5\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+3\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+13}{\left(1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(5\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+7\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+9\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int\frac{5t^2+5t+8}{t^2(t^2+5t+8)}dt \qquad \text{（2 点）} \\
&= \int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{4}{t^2+5t+8}\right)dt \qquad \text{（3 点）} \\
&= \int\left\{\frac{1}{t^2}+\frac{4}{(\frac{\sqrt{7}}{2})^2+(t+\frac{5}{2})^2}\right\}dt \\
&= -\frac{1}{t}+\frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\arctan\frac{t+\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \\
&= -\frac{1}{t}+\frac{8}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+5}{\sqrt{7}} \qquad \text{（順に 2 点, 3 点）}
\end{aligned}$$

（本来は x に戻すが，ここまでで採点する）

※部分分数分解は

$$\frac{5t^2+5t+8}{t^2(t^2+5t+8)}=\frac{(t^2+5t+8)+4t^2}{t^2(t^2+5t+8)}=\frac{1}{t^2}+\frac{4}{t^2+5t+8}$$

と式変形（暗算）で求めるか

$$\frac{5t^2+5t+8}{t^2(t^2+5t+8)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{Ct+D}{t^2+5t+8}$$

と設定して，定数 A,B,C を求めればよい．

$\boxed{3}$ $\sqrt{4x^2-x+7}+2x=t$ とおくことにより，$\displaystyle\int\frac{5}{(x+2)\sqrt{4x^2-x+7}}dx$ を求めよ．

解答

$t=\sqrt{4x^2-x+7}+2x$ とおくと　　$t-2x=\sqrt{4x^2-x+7}$

両辺 2 乗して　　$t^2-4tx+4x^2=4x^2-x+7$　　$\therefore$　$x=\dfrac{t^2-7}{4t-1}$　　（1 点）

また　　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t\cdot(4t-1)-(t^2-7)\cdot 4}{(4t-1)^2}=\dfrac{2(2t^2-t+14)}{(4t-1)^2}$　　（1 点）

さらに　　$\sqrt{4x^2-x+7}=t-2x=t-2\cdot\dfrac{t^2-7}{4t-1}=\dfrac{2t^2-t+14}{4t-1}$　　（1 点）

よって

$$\begin{aligned}
\int\frac{5}{(x+2)\sqrt{4x^2-x+7}}dx &= \int\frac{5}{\left(\dfrac{t^2-7}{4t-1}+2\right)\dfrac{2t^2-t+14}{4t-1}}\cdot\frac{2(2t^2-t+14)}{(4t-1)^2}dt \\
&= \int\frac{10}{t^2+8t-9}dt \qquad \text{（2 点）} \\
&= \int\frac{10}{(t+9)(t-1)}dt \\
&= \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+9}\right)dt \\
&= \log|t-1|-\log|t+9| \qquad \text{（5 点）}
\end{aligned}$$

（本来は x に戻すが，ここまでで採点する）

$\boxed{4}$ 次を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{(\arctan x)^3(1+x^2)}dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x\arcsin x dx$

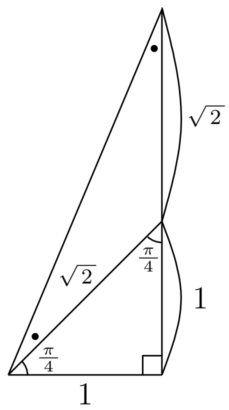
解答

(1)
$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{(\arctan x)^3(1+x^2)}dx &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1+\sqrt{2}} (\arctan x)^{-3}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}(\arctan x)^{-2}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1+\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{8}{3\pi}\right)^2-\left(\frac{6}{\pi}\right)^2\right\} \qquad \text{（5 点）} \\ &= \frac{130}{9\pi^2} \qquad \text{（5 点）}\end{aligned}$$

※右図より

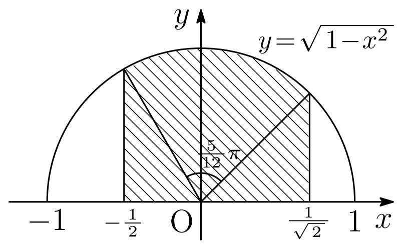
$$\arctan(1+\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{8}\pi$$

であることがわかる．



(2)
$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x\arcsin x dx &= \Big[(x^2-1)\arcsin x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} \\ &\quad +\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{5}{12}\pi+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -\frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{4} \qquad \text{（順に 4 点, 3 点, 3 点）}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \arcsin x & & x^2-1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \swarrow\!\!\!\searrow & 2x \end{array}$$



※ $\arcsin x = t$ とおくと

$$x=\sin t,\quad \frac{dx}{dt}=\cos t,\quad \begin{array}{c|ccc} x & -\frac{1}{2} & \to & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline t & -\frac{\pi}{6} & \to & \frac{\pi}{4}\end{array}$$

であるから

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x\arcsin x dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2\sin t\cdot t\cdot\cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} t\sin 2t dt \qquad \text{（以降省略）}$$

$\boxed{5}$ 次を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log(x^2+x+1)}{x^2}dx$

解答

(1)
$$\begin{aligned}\int_0^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} 2\int_\varepsilon^{e^2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} 2\Big[\log(\sqrt{x}+1)\Big]_\varepsilon^{e^2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} 2\left\{\log(e+1)-\log(\sqrt{\varepsilon}+1)\right\} \\ &= 2\log(e+1) \qquad \text{（10 点）}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int \frac{\log(x^2+x+1)}{x^2}dx &= -\frac{\log(x^2+x+1)}{x} + \int \frac{2x+1}{x(x^2+x+1)}dx \\ &= -\frac{\log(x^2+x+1)}{x} + \int \left(\frac{1}{x}+\frac{-x+1}{x^2+x+1}\right)dx \\ &= -\frac{\log(x^2+x+1)}{x} + \int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x+2}{x^2+x+1}\right)dx \\ &= -\frac{\log(x^2+x+1)}{x} + \int \left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-(2x+1)+3}{x^2+x+1}\right\}dx \\ &= -\frac{\log(x^2+x+1)}{x} + \int \left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x+\frac{1}{2})^2}\right\}dx \\ &= -\frac{\log(x^2+x+1)}{x} + \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= -\frac{\log(x^2+x+1)}{x} - \frac{1}{2}\log\frac{x^2+x+1}{x^2} + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \log(x^2+x+1) & & -\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} & & \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{\log(x^2+x+1)}{x^2}dx &= \lim_{R\to\infty}\int_1^{R} \frac{\log(x^2+x+1)}{x^2}dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{\log(x^2+x+1)}{x} - \frac{1}{2}\log\frac{x^2+x+1}{x^2} + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_1^R \\ &= \lim_{R\to\infty}\Bigg[-\left\{\frac{\log(R^2+R+1)}{R}-\log 3\right\} - \frac{1}{2}\left(\log\frac{R^2+R+1}{R^2}-\log 3\right) \\ &\qquad\qquad + \sqrt{3}\left(\arctan\frac{2R+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3}\right)\Bigg] \\ &= -(0-\log 3) - \frac{1}{2}(0-\log 3) + \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{3}{2}\log 3 + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi \qquad \text{（順に 5 点, 5 点）}\end{aligned}$$

※部分分数分解は

$$\frac{2x+1}{x(x^2+x+1)} = \frac{(x^2+x+1)-x^2+x}{x(x^2+x+1)} = \frac{1}{x}+\frac{-x+1}{x^2+x+1}$$

と式変形（暗算）で求めるか

$$\frac{2x+1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

と設定して，定数 A, B, C を求めればよい．