２００２年度数学Ａ講義ノート

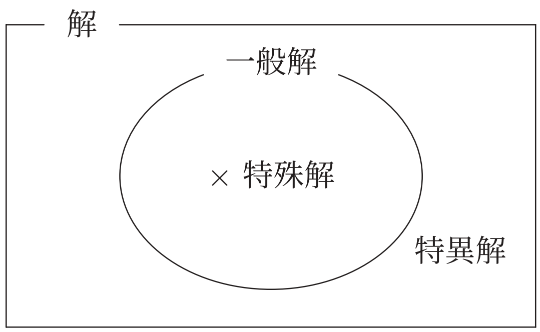
２００２年１２月１７日分

§１８．微分方程式（テキスト）

※微分方程式を扱うときは，積分定数を必要に応じて用いる．

y：x の関数

常微分方程式 …… x，y，y'，y''，$\cdots$ を含む方程式
階数 …… 微分方程式に含まれる導関数の最高次数
一般解 …… 微分方程式の階数と同じ個数の任意定数を含んでいる解
特殊解 …… 一般解の任意定数に特定の値を代入したもの
特異解 …… 一般解でも特殊解でもない解



これから扱う微分方程式

[1] 1 階線形常微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x)$$

[2] 1 階変数分離形常微分方程式

$$y' = f(x)g(y)$$

[3] 定数係数 2 階線形常微分方程式

$$y'' + py' + qy = r(x)$$

$\boxed{\text{準備}}$

(0) $y' = \dfrac{dy}{dx}$

(1) $y' = f(x)$ の一般解は，積分の定義より $y = \displaystyle\int f(x)dx$
（1 階線形常微分方程式で最も単純なもの）

(2) $A(x) = \displaystyle\int a(x)dx$ とおくと，$A'(x) = a(x)$ で

$$\left(e^{A(x)}\right)' \overset{\text{合}}{=} e^{A(x)} \cdot A'(x) = a(x)e^{A(x)}$$

よって

$$\left(e^{A(x)}y\right)' \overset{\text{積}}{=} \left(e^{A(x)}\right)' \cdot y + e^{A(x)} \cdot y' = a(x)e^{A(x)}y + e^{A(x)}y' = \left(y' + a(x)y\right)e^{A(x)}$$

[1] 1 階線形常微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x) \quad \cdots (*)$$

> **<u>定理 18.1</u>**　（テキスト p.134）
> $(*)$ の一般解は
> $$y = e^{-P_0(x)}\Big(R_0(x) + C\Big) \qquad (C：任意定数)$$
> で与えられる．ここで，$P_0(x)$，$R_0(x)$ は
> $$P_0{}' = p(x), \qquad R_0{}'(x) = q(x)e^{P_0(x)}$$
> をみたすもので，1 つ固定する（今までやってきた不定積分のように，積分定数を省略したものと思えばよい）．

証明：準備 (1)，(2) より

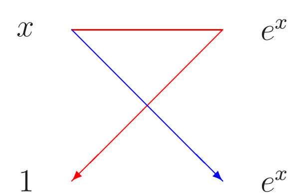
$$\begin{aligned}
(*) &\iff \Big(y' + p(x)y\Big)e^{P_0(x)} = q(x)e^{P_0(x)} \\
&\overset{(2)}{\iff} \Big(e^{P_0(x)}y\Big)' = q(x)e^{P_0(x)} \\
&\overset{(1)}{\iff} e^{P_0(x)}y = \int q(x)e^{P_0(x)}dx = R_0(x) + C \\
&\iff y = e^{-P_0(x)}\Big(R_0(x) + C\Big) \qquad (C：任意定数)
\end{aligned}$$

<u>問 18.3</u>　（テキスト p.135）

(1) $y' + y = x \quad \overset{*}{\iff} \quad (y' + y)e^x = xe^x \quad \iff \quad \big(e^x y\big)' = xe^x$

より

$$\begin{aligned}
e^x y &= \int xe^x dx \\
&= xe^x - \int e^x dx \\
&= xe^x - e^x + C
\end{aligned}$$



$$\therefore \quad y = e^{-x}\Big(xe^x - e^x + C\Big) = x - 1 + Ce^{-x} \qquad (C：任意定数)$$

※ $y' + {\color{blue}1}y = x$ より，$P_0(x) = \int {\color{blue}1}dx = {\color{red}x}$ として $e^{\color{red}x}$ を両辺にかければ準備 (2) が使える．

※この微分方程式の解のうち，$x = 0$ のとき $y = 1$ となるのは

$$1 = (0 - 1) + Ce^{-0} \qquad \therefore \quad 1 = -1 + C \qquad \therefore \quad C = 2$$

より

$$y = x - 1 + 2e^{-x}$$

(2) $y' = y + e^x \iff y' - y = e^x \overset{*}{\iff} (y' - y)e^{-x} = 1 \iff \left(e^{-x}y\right)' = 1$

より $e^{-x}y = \displaystyle\int dx = x + C$

$$\therefore \quad y = e^x\left(x + C\right) = xe^x + Ce^x \qquad (C\text{：任意定数})$$

※ $y' + (-1)y = e^x$ より，$P_0(x) = \displaystyle\int (-1)dx = -x$ として e^{-x} を両辺にかければ準備 (2) が使える．

(3) $xy' + y = \cos x \iff \left(xy\right)' = \cos x$

より $xy = \displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

$$\therefore \quad y = \frac{\sin x + C}{x} \qquad (C\text{：任意定数})$$

練習問題 18　（プリント p.139）

2. (1) $y' + xy = x \overset{*}{\iff} (y' + xy)e^{\frac{1}{2}x^2} = xe^{\frac{1}{2}x^2} \iff \left(e^{\frac{1}{2}x^2}y\right)' = xe^{\frac{1}{2}x^2}$

より $e^{\frac{1}{2}x^2}y = \displaystyle\int xe^{\frac{1}{2}x^2}dx = e^{\frac{1}{2}x^2} + C$

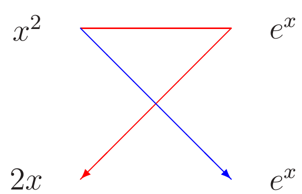
$$\therefore \quad y = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(e^{\frac{1}{2}x^2} + C\right) = 1 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad (C\text{：任意定数})$$

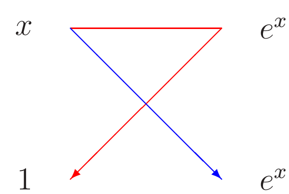
※ $y' + xy = x$ より，$P_0(x) = \displaystyle\int x dx = \frac{1}{2}x^2$ として $e^{\frac{1}{2}x^2}$ を両辺にかければ準備 (2) が使える．

(2) $y' + y = x^2 \overset{*}{\iff} (y' + y)e^x = x^2e^x \iff \left(e^xy\right)' = x^2e^x$

より

$$e^xy = \int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\int xe^xdx = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^xdx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$





$$\therefore \quad y = e^{-x}\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C\right) = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x} \qquad (C\text{：任意定数})$$

※ $y' + 1y = x$ より，$P_0(x) = \displaystyle\int 1dx = x$ として e^x を両辺にかければ準備 (2) が使える．

(3) $y' + y\cos x = \cos x \overset{*}{\iff} (y' + y\cos x)e^{\sin x} = \cos x \cdot e^{\sin x} \iff \left(e^{\sin x}y\right)' = \cos x \cdot e^{\sin x}$

より $e^{\sin x}y = \displaystyle\int \cos x \cdot e^{\sin x}dx = e^{\sin x} + C$

$$\therefore \quad y = e^{-\sin x}\left(e^{\sin x} + C\right) = 1 + Ce^{-\sin x} \qquad (C\text{：任意定数})$$

※ $y' + \cos x \cdot y = \cos x$ より，$P_0(x) = \displaystyle\int \cos x dx = \sin x$ として $e^{\sin x}$ を両辺にかければ準備 (2) が使える．