２００２年度数学Ａ講義ノート

２００３年１月１４日分

$\boxed{\text{準備}}$

(0) $y' = \dfrac{dy}{dx}$

(1) $y' = f(x)$ の一般解は，積分の定義より $y = \displaystyle\int f(x)dx$
　（1 階線形常微分方程式で最も単純なもの）

(2) $A(x) = \displaystyle\int a(x)dx$ とおくと，$A'(x) = a(x)$ で

$$\left(e^{A(x)}\right)' \overset{\text{合}}{=} e^{A(x)} \cdot A'(x) = a(x)e^{A(x)}$$

よって

$$\left(e^{A(x)}y\right)' \overset{\text{積}}{=} \left(e^{A(x)}\right)' \cdot y + e^{A(x)} \cdot y' = a(x)e^{A(x)}y + e^{A(x)}y' = \left(y' + a(x)y\right)e^{A(x)}$$

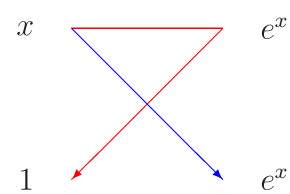
試験問題

$\boxed{4}$ (1) $y' + y = x$，$y(0) = 1$ を解け．

$y' + y = x \quad \overset{*}{\Longleftrightarrow} \quad (y' + y)e^x = xe^x \quad \Longleftrightarrow \quad \left(e^x y\right)' = xe^x$

より

$$\begin{aligned} e^x y &= \int xe^x dx \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \end{aligned}$$



$$\therefore \quad y = e^{-x}\left(xe^x - e^x + C\right) = x - 1 + Ce^{-x} \qquad (C\text{：任意定数})$$

ここで，$x = 0$ のとき $y = 1$ より $1 = -1 + C \qquad \therefore \quad C = 2$
よって

$$y = x - 1 + 2e^{-x}$$

※ $y' + {\color{blue}1}y = x$ より，$\displaystyle\int {\color{blue}1}dx = {\color{red}x}$ として $e^{\color{red}x}$ を両辺にかければ準備 (2) が使える．

[3] 定数係数 2 階線形常微分方程式

$$y'' + py' + qy = r(x) \quad \cdots (*)$$

定義

$(*)$ に対して

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \cdots (**), \qquad t^2 + pt + q = 0 \quad \cdots (\#)$$

をそれぞれ補助方程式，特性方程式という.

準備

(3) $z'' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = A + Bx$

(4) $\left(e^{-\alpha x}y\right)' \overset{積}{=} \left\{\left(e^{-\alpha x}\right)' \cdot y + e^{-\alpha x} \cdot y'\right\}' = -\alpha e^{-\alpha x}y + e^{-\alpha x}y'$ より

$$\begin{aligned}\left(e^{-\alpha x}y\right)'' &\overset{積}{=} -\alpha\left\{\left(e^{-\alpha x}\right)' \cdot y + e^{-\alpha x} \cdot y'\right\} + \left(e^{-\alpha x}\right)' \cdot y' + e^{-\alpha x} \cdot (y')' \\ &= -\alpha\left(-\alpha e^{-\alpha x}y + e^{-\alpha x}y'\right) - \alpha e^{-\alpha x}y' + e^{-\alpha x}y'' \\ &= \left(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y\right)e^{-\alpha x}\end{aligned}$$

(5) $z'' + b^2 z = 0$ の一般解は

$$z = A\cos bx + B\sin bx \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

※ちゃんと解くのは難しい.

定理　（テキスト p.137）

(1) $(\#)$ が異なる実数解 α, β をもつとき，$(**)$ の一般解は

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

(2) $(\#)$ が重解 α をもつとき，$(**)$ の一般解は

$$y = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x} \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

(3) $(\#)$ が異なる虚数解 $a \pm bi$ をもつとき，$(**)$ の一般解は

$$y = Ae^{ax}\cos bx + Be^{ax}\sin bx \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

証明： 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} \qquad \text{（解と係数の関係）}$$

が成り立つことに注意.

(1) $\alpha + \beta = -p$，$\alpha\beta = q$ なので

$$(**) \quad \Longleftrightarrow \quad y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (y' - \beta y)' - \alpha(y' - \beta y) = 0$$

よって $z=y'-\beta y$ とおくと $z'-\alpha z=0$ となるので，[1] の方法により $z=Ae^{\alpha x}$ を得る．z を元にもどすと $y'-\beta y=Ae^{\alpha x}$ となるので，再び [1] の方法により

$$y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}\quad (A,B \text{ は任意定数})$$

(2) $2\alpha=-p$，$\alpha^2=q$ なので

$$(**)\quad\iff\quad y''-2\alpha y'+\alpha^2 y=0\quad\overset{(4)}{\iff}\quad \left(e^{-\alpha x}y\right)''=0\quad\overset{(3)}{\iff}\quad e^{-\alpha x}y=A+Bx$$

よって

$$y=Ae^{\alpha x}+Bxe^{\alpha x}\quad (A,B \text{ は任意定数})$$

(3) $2a=-p$，$a^2+b^2=q$ なので

$$(*)\quad\iff\quad y''-2ay'+(a^2+b^2)y=0\quad\overset{(4)}{\iff}\quad \left(e^{-ax}y\right)''+b^2\cdot e^{-ax}y=0$$

よって，準備 (5) より $e^{-ax}y=A\cos bx+B\sin bx$

$$\therefore\quad y=Ae^{ax}\cos bx+Be^{ax}\sin bx\quad (A,B \text{ は任意定数})$$

※複素数まで範囲を広げれば，(1) が使えて簡単になる．ただし，オイラーの公式は既知とする．$\alpha=a-bi$，$\beta=a+bi$ とみれば，(1) より

$$\begin{aligned} y &= Ae^{a-bi}+Be^{a-bi} \\ &= Ae^{a}(\cos bx-i\sin bx)+Be^{a}(\cos bx+i\sin bx) \\ &= (A+B)e^{ax}\cos bx+(-Ai+Bi)e^{ax}\sin bx \end{aligned}$$

となるので，$A+B, -Ai+Bi$ をそれぞれ A,B に書きなおせば

$$y=Ae^{ax}\cos bx+Be^{ax}\sin bx\quad (A,B \text{ は任意定数})$$

定理

$(*)$ の一般解は，$(**)$ の一般解と $(*)$ の特殊解の和で表せる．

証明： $(*)$ の一般解を y，$(*)$ の特殊解を y_0，$(**)$ の一般解を y_1 とする．

$$\begin{array}{rccccccc} & y'' & + & py' & + & qy & = & r(x) \\ -) & y_0'' & + & py_0' & + & qy_0 & = & r(x) \\ \hline & (y-y_0)'' & + & p(y-y_0)' & + & q(y-y_0) & = & 0 \end{array}$$

よって，$y-y_0=y_1\qquad\therefore\quad y=y_1+y_0$

試験問題

$\boxed{4}$ (2) $y' - 3y' + 2y = x$，$y(0) = y'(0) = 0$ を解け.

(i) 補助方程式の一般解
特性方程式は $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) = 0 \qquad \therefore \quad t = 1, 2$
よって，上の定理より

$$y_1 = Ae^x + Be^{2x} \quad （A, B \text{ は任意定数}）$$

(ii) 与えられた方程式の特殊解
未定係数法を用いる（テキスト p.138 参照）．$y_0 = ax + b$ を与えられた方程式に代入すると

$$(ax+b)'' - 3(ax+b)' + 2(ax+b) = x \qquad \therefore \quad (2a-1)x + (-3a+2b) = 0$$

係数を比較して

$$2a - 1 = 0,\ -3a + 2b = 0 \qquad \therefore \quad a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{4}$$

よって $y_0 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$
(iii) 与えられた方程式の一般解
(i)，(ii)，上の定理より

$$y = y_1 + y_0 = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \quad （A, B \text{ は任意定数}）$$

ここで，$x = 0$ のとき $y = 0$ より

$$0 = A + B + \frac{3}{4} \qquad \therefore \quad 4A + 4B = -3 \quad \cdots ①$$

また，$y' = Ae^x + 2Be^{2x} + \dfrac{1}{2}$ で，$x = 0$ のとき $y' = 0$ より

$$0 = A + 2B + \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad 2A + 4B = -1 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて $A = -1$，$B = \dfrac{1}{4}$

$$\therefore \quad y = -e^x + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

※直接解くには，次のように計算する.
補助方程式の一般解についての定理 (1) の変形と同様にすれば $(y' - 2y)' - (y' - 2y) = x$
$z = y' - 2y$ とおくと $z' - z = x$ となるので，[1] の方法により

$$e^{-x}z = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + A$$

z を元にもどせば $y' - 2y = -x - 1 + Ae^x$ となるので，再び [1] の方法により

$$e^{-2x}y = \int(-xe^{-2x} - e^{-2x} + Ae^{-x})dx = \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{3}{4}e^{-2x} - Ae^{-x} + B$$

よって

$$y = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \quad （A, B \text{ は任意定数}）$$