

解答用紙の裏面使用可

1 次の問に答えよ．

(1) L'Hospital の定理を用いて，極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ を求めよ．

(2) $\arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{1}{8} - \arctan \frac{3}{11}$ の値を求めよ．

(3) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ を微分せよ．

(4) $x > -1$ のとき， $\arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$ を示せ．

2 $f(0) = 1$, $(1+x^2)f'(x) = -f(x)$ を満たす関数 $f(x)$ に対して，次の問に答えよ．

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = -f^{(n)}(x)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(x)$ の Maclaurin 展開の 5 次以下の項を求めよ．ただし，係数は既約分数にすること．また，6 次以上の項について求めた場合は，係数が 0 でない項に対し最大 10 点まで加点する．

3 次の定積分を求めよ．

(1) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x dx$

(2) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} 2x \arctan x dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^2 x dx$

4 (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C, D の値を求めよ．

$$\frac{7x^2 + 12x + 65}{(x+1)(x-2)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+5}$$

(2) $\int \frac{7x^2 + 12x + 65}{(x+1)(x-2)(x^2+2x+5)} dx$ を求めよ．

解答用紙の裏面使用可

1 $t = \tan \frac{x}{2}$ とおくことにより, $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$ を求めよ.

2 $t = \sqrt{x^2 + 1} + x$ とおくことにより, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} dx$ を求めよ.

3 $f(x, y) = x^2 - xy^2 + xy - y^3$ について, 次の問に答えよ.

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ.

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

$f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) : \text{極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極大値}$

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする.

4 次の積分を求めよ.

(1) $\int_2^6 \left(\int_1^{x^2} \frac{x}{y^2} dy \right) dx$ (2) $\int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{1}{1 + y^2} dy \right) dx$

(3) $\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 \sqrt{y^3 + 1} dy \right) dx$ (順序変更)

(4) $\int \int_D y^2 dx dy$ ($D : x^2 + y^2 \leq 2x$)

(5) $\int \int_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$ ($D : x \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$)