

解答用紙の裏面使用可

[1] 次の間に答えよ .

(1) L'Hospital の定理を用いて, 極限値 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{1 - \cos x}$ を求めよ .(2) $\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{4}{7}$ の値を求めよ .(3) $\arcsin \sqrt{1 - x^2}$ を微分せよ .(4) $x > -1$ のとき, $\arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$ を示せ .[2] $f(0) = 1$, $(1 + x^2)f'(x) = f(x)$ を満たす関数 $f(x)$ に対して, 次の間に答えよ .(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1 + x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = f^{(n)}(x)$$

が成り立つことを示せ .

(2) $f(x)$ の Maclaurin 展開の 5 次以下の項を求めよ . ただし, 係数は既約分数にすること . また, 6 次以上の項について求めた場合は, 係数が 0 でない項に対し最大 10 点まで加点する .

[3] 次の定積分を求めよ .

$$(1) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arcsin x dx$$

$$(2) \int_{-1}^{\sqrt{3}} 2x \arctan x dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^8 x dx$$

[4] (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C, D の値を求めよ .

$$\frac{10x^2 - 29x + 33}{(x+1)(x-2)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 5}$$

(2) $\int \frac{10x^2 - 29x + 33}{(x+1)(x-2)(x^2 - 2x + 5)} dx$ を求めよ .

解答用紙の裏面使用可

1 $t = \tan \frac{x}{2}$ とおくことにより, $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$ を求めよ.

2 $t = \sqrt{x^2 + 3x - 1} + x$ とおくことにより, $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx$ を求めよ.

3 $f(x, y) = x^3 + xy^2 + 2x^2 + y^2$ について, 次の間に答えよ.

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ.

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

$f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) : \text{極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極大値}$

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする.

4 次の積分を求めよ.

$$(1) \int_3^6 \left(\int_1^{x^2} \frac{x}{y^2} dy \right) dx$$

$$(2) \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+y^2} dy \right) dx$$

$$(3) \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{\sqrt{y^3 + 1}} dy \right) dx \quad (\text{順序変更})$$

$$(4) \int \int_D y^2 dx dy \quad (D : x^2 + y^2 \leq 2x)$$

$$(5) \int \int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \quad (D : x \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0)$$