科目名	数学A	対象	1A-2	学部研究科	工学部第二部	学科専攻科		学籍番号		評点
平成 25 年 1 月 23 日 (水) 2 回目 (～ 時限目)		担当	石川　学	学年		氏名				
試験時間	60 分	注意事項	1. 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ (　　)							

2012 年度 A 科 2 組　後期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C の値を求めよ．**(1) は答のみでよい．**

$$\frac{-4x^2-11x-39}{(x-3)(x^2+8x+21)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+8x+21}$$

(2) $\displaystyle\int\frac{-4x^2-11x-39}{(x-3)(x^2+8x+21)}dx$ を求めよ．

$\boxed{2}$ $\sqrt{x^2-7x+1}+x=t$ とおくことにより，$\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-7x+1}}dx$ を求めよ．

$\boxed{3}$ $f(x,y)=x^3+xy^2-6x^2-3y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．**(1) は答のみでよい．**

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

※ $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0 \implies f(a,b)$：極小値
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0 \implies f(a,b)$：極大値
$H(a,b)<0 \implies f(a,b)$：極値でない
ただし $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$ とする．

$\boxed{4}$ 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty}\frac{1}{x^2-x+1}dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_0^{x^2}(3x-4y)dy\right\}dx$

(3) $\displaystyle\int_1^3\left(\int_1^x\log y\,dy\right)dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{3\sqrt{x}}^{3}\frac{1}{\sqrt{y^3+9}}dy\right)dx$　（順序変更）

(5) $\displaystyle\iint_D(7x+3y)dxdy$　$(D: x\leqq x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0)$

20 10 25 50

東京理科大学 平成 年 月 日 **試 験 答 案**

科目名		担当 先生	評点
該当学部を○で囲む 理学部 1 / 工学部 2	部 学科 年 番	氏名 A − 2	

[1] (1) $-4x^2-11x-39 = A(x^2+8x+21)+(Bx+C)(x-3)$

・$x=3$ … $-108 = 54A$ ∴ $A=-2$

・$x=0$ … $-39 = 21A-3C$, $-39=-42-3C$ ∴ $C=-1$

・$x=1$ … $-54 = 30A-2(B+C)$, $-27=-30-B+1$ ∴ $B=-2$

$(A,B,C) = (-2,-2,-1)$ ③ ③ ③

(2) 与式 $= \int\left(-\frac{2}{x-3}-\frac{2x+1}{x^2+8x+21}\right)dx = \int\left\{-\frac{2}{x-3}-\frac{(2x+8)-7}{x^2+8x+21}\right\}dx = \int\left\{-\frac{2}{x-3}-\frac{2x+8}{x^2+8x+21}+\frac{7}{(\sqrt5)^2+(x+4)^2}\right\}dx$

$= -2\log|x-3| - \log(x^2+8x+21) + \frac{7}{\sqrt5}\arctan\frac{x+4}{\sqrt5}$ ③ ③ ⑤

符号 △1

arcミス △3

[2] $\sqrt{x^2-7x+1}+x=t$ とおくと $\sqrt{\quad} = t-x$

$4t^2-14t-2t^2+2$

両辺2乗して $\cancel{x^2}-7x+1 = t^2-2tx+\cancel{x^2}$ ∴ $x=\frac{t^2-1}{2t-7}$ ②

また $\frac{dx}{dt} = \frac{2t\cdot(2t-7)-(t^2-1)\cdot 2}{(2t-7)^2} = \frac{2(t^2-7t+1)}{(2t-7)^2}$ ②

さらに $\sqrt{\quad} = t-\frac{t^2-1}{2t-7} = \frac{t^2-7t+1}{2t-7}$ ①

∴ 与式 $= \int\frac{1}{\frac{t^2-1}{2t-7}\cdot\frac{t^2-7t+1}{2t-7}}\cdot\frac{2(t^2-7t+1)}{(2t-7)^2}dt = \int\frac{2}{t^2-1}dt = \int\frac{2}{(t-1)(t+1)}dt = \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \log|t-1|-\log|t+1|$ ② ③ ③

[3] (1) $\begin{cases} f_x = 3x^2+y^2-12x=0 & — ① \\ f_y = 2xy-6y=0 & — ② \end{cases}$

② より $2(x-3)y=0$ ∴ $x=3$ or $y=0$

$x=3$ のとき, ① より $27+y^2-36=0$, $y^2=9$ ∴ $y=\pm3$

$y=0$ のとき, ① より $3x^2-12x=0$, $3x(x-4)=0$ ∴ $x=0,4$

よって, 停留点は $(3,\pm3)$, $(0,0)$, $(4,0)$ 各② ④ ④ ④

(2) $f_{xx}=6x-12$, $f_{yy}=2x-6$, $f_{xy}=2y$

$H = (6x-12)(2x-6)-(2y)^2 = 4\{3(x-2)(x-3)-y^2\}$

・$H(3,\pm3) = 4\cdot(-9) < 0$ ① ∴ $f(3,\pm3)$ × ①

・$H(0,0) = 4\cdot3\cdot(-2)\cdot(-3) > 0$ ① , $f_{xx}(0,0) = -12<0$ ∴ $f(0,0)=0$ ③ 大 ①

・$H(4,0) = 4\cdot3\cdot2\cdot1 > 0$ ① , $f_{xx}(4,0)=12>0$ ① ∴ $f(4,0)=-32$ ③ 小 ①

$(3,\pm3)$ ④, $H(3,\pm3)=4\cdot(-9)=-36<0$ ① ,

$(0,0)$ ④, $H(0,0)=72>0$ ① , $f_{xx}(0,0)=-12<0$ ① , $f(0,0)=0$ ③ 大 ①

$(4,0)$ ④, $H(4,0)=24>0$ ① , $f_{xx}(4,0)=12>0$ ① , $f(4,0)=-32$ ③ 小 ①

25点

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{1}{(\frac{\sqrt3}{2})^2+(x-\frac12)^2}\,dx = \frac{1}{\frac{\sqrt3}{2}}\arctan\frac{x-\frac12}{\frac{\sqrt3}{2}} = \frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}$ だから

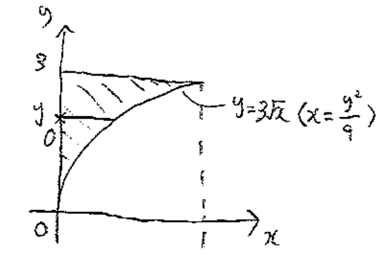
$$\int_{-1}^{R}\frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \left[\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}\right]_{-1}^{R} = \frac{2}{\sqrt3}\left\{\arctan\frac{2R-1}{\sqrt3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$\therefore \int_{-1}^{\infty}\frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\frac{2}{\sqrt3}\left(\arctan\frac{2R-1}{\sqrt3}+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{3\sqrt3}\pi \quad 10$$

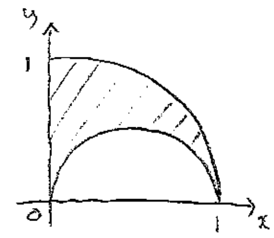
(2) $$\int_{-1}^{2}\left\{\int_0^{x^2}(3x-4y)\,dy\right\}dx = \int_{-1}^{2}\left[3xy-2y^2\right]_{y=0}^{y=x^2}dx = \int_{-1}^{2}(3x^3-2x^4)\,dx = \left[\frac34x^4-\frac25x^5\right]_{-1}^{2}$$
$$= \frac34(16-1)-\frac25\{32-(-1)\} = -\frac{39}{20} \quad 10$$

(3) $$\int_1^3\left(\int_1^x \log y\,dy\right)dx = \int_1^3\left[y\log y-y\right]_{y=1}^{y=x}dx = \int_1^3\{(x\log x-1\cdot 0)-(x-1)\}\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}-\frac12(x-1)^2\right]_1^3 = \frac12(9\log3-1\cdot0)-\frac14(9-1)-\frac12(4-0) = \frac92\log3-4$$

(4) $$\int_0^1\left(\int_{3\sqrt{x}}^{3}\frac{1}{\sqrt{y^3+9}}\,dy\right)dx = \int_0^3\left(\int_0^{\frac{y^2}{9}}\frac{1}{\sqrt{y^3+9}}\,dx\right)dy = \int_0^3\left[\frac{x}{\sqrt{y^3+9}}\right]_{x=0}^{x=\frac{y^2}{9}}dy$$
$$= \int_0^3\frac{y^2}{9\sqrt{y^3+9}}\,dy = \frac{1}{27}\int_0^3(y^3+9)^{-\frac12}\cdot3y^2\,dy$$
$$= \frac{1}{27}\left[2(y^3+9)^{\frac12}\right]_0^3 = \frac{2}{27}(6-3) = \frac29$$



(5) $$\iint_D(7x+3y)\,dx\,dy \quad (D: x\le x^2+y^2\le1,\ x\ge0,\ y\ge0)$$
$$= \iint_{D'}(7r\cos\theta+3r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta \quad (D': 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ \cos\theta\le r\le1)$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_{\cos\theta}^{1}r^2(7\cos\theta+3\sin\theta)\,dr\right\}d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}(7\cos\theta+3\sin\theta)\right]_{r=\cos\theta}^{r=1}d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac13(1-\cos^3\theta)(7\cos\theta+3\sin\theta)\,d\theta$$
$$= \frac13\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{7\cos\theta+3\sin\theta-7\cos^4\theta+3\cos^3\theta\cdot(-\sin\theta)\}\,d\theta$$
$$= \frac13\left(7\cdot1+3\cdot1-7\cdot\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}+\left[\frac34\cos^4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$= \frac13\left\{10-\frac{21}{16}\pi+\frac34(0-1)\right\}$$
$$= \frac13\left(\frac{37}{4}-\frac{21}{16}\pi\right)$$
$$= \frac{37}{12}-\frac{7}{16}\pi$$



$\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}$ △3

$\frac{2}{\sqrt3}\left(\arctan\frac{2R-1}{\sqrt3}+\frac{\pi}{3}\right)$ △5

(1) $\frac{5}{3\sqrt3}\pi$ 10

(2) $-\frac{39}{20}$ 10

(3) $\frac92\log3 - 4$ 5 5

(4) $\int_0^3\left(\int_0^{\frac{y^2}{9}}\frac{1}{\sqrt{\ }}\,dx\right)dy$ △3

$\frac29$ 10

(5) $\frac{37}{12}-\frac{7}{16}\pi$ 5 5