

科目名	数学A	対象	1A-1	学部 研究科	工学部第二部	学科 専攻科		学籍 番号		評 点
平成 26 年 1 月 22 日 (水) 3 回目 (~ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験 時間	60 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 予記のみ参照・待込可 ()							

2013 年度 A 科 1 組 後期試験

※解答用紙の裏面使用可

- 1 (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C の値を求めよ. (1) は答のみでよい.

$$\frac{x^2 - 4x - 53}{(x-3)(x^2 + 8x + 23)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2 + 8x + 23}$$

- (2) $\int \frac{x^2 - 4x - 53}{(x-3)(x^2 + 8x + 23)} dx$ を求めよ.

- 2 $\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x = t$ とおくことにより, $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 + 3x + 1}} dx$ を求めよ.

- 3 $f(x, y) = x^2y + y^3 - x^2 - 2y^2 - 2xy + 2x + y$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ. (1) は答のみでよい.

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

※ $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b)$: 極小値

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b)$: 極大値

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b)$: 極値でない

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする.

- 4 次の積分を求めよ.

(1) $\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2x \arctan x dx$

(2) $\int_{-1}^2 \left\{ \int_{-1}^{x^2} (3x - 5y) dy \right\} dx$

(3) $\int_1^2 \left(\int_x^{x^3} \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx$

(4) $\int_0^1 \left\{ \int_0^x (x+1)e^{2y} dy \right\} dx$

(5) $\int_0^7 \left(\int_{\frac{4}{7}x}^4 \frac{y}{\sqrt{y^3 + 36}} dy \right) dx$ (順序変更)

科目名		担当 先生		
該○ 当○ 学○ 部○ を○ む○	理学部 工学部	1 部	学科 年 番	A-1

1

(1) 分母を1753と

$$x^2 - 4x - 53 = A(x^2 + 8x + 23) + (Bx + C)(x - 3)$$

$$\cdot x=3 \dots -56 = 56A \therefore A = -1$$

$$\cdot x=0 \dots -53 = 23A - 3C$$

$$-53 = -23 - 3C \therefore C = 10$$

$$\cdot x=1 \dots -56 = 32A - 2(B+C)$$

$$-56 = -32 - 2B - 20 \therefore B = 2$$

$$\therefore 2 (A, B, C) = (-1, 2, 10)$$

$$(2) \int \frac{x^2 - 4x - 53}{(x-3)(x^2 + 8x + 23)} dx$$

$$= \int \left(-\frac{1}{x-3} + \frac{2x+10}{x^2+8x+23} \right) dx$$

$$= \int \left\{ -\frac{1}{x-3} + \frac{2x+8}{x^2+8x+23} + \frac{2}{(\sqrt{7})^2 + (x+4)^2} \right\} dx$$

$$= -\log|x-3| + \log(x^2+8x+23) + \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x+4}{\sqrt{7}}$$

2

$$\sqrt{4x^2+3x+1} = t - 2x \text{ の両辺を2乗すると}$$

$$4x^2+3x+1 = t^2 - 4tx + 4x^2$$

$$(4t+3)x = t^2 - 1 \therefore x = \frac{t^2 - 1}{4t+3}$$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot (4t+3) - (t^2-1) \cdot 4}{(4t+3)^2} = \frac{2(2t^2+3t+2)}{(4t+3)^2}$$

さらに

$$\sqrt{4x^2+3x+1} = t - \frac{2(t^2-1)}{4t+3} = \frac{2t^2+3t+2}{4t+3}$$

よって

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \sqrt{4x^2+3x+1}} dx &= \int \frac{1}{\frac{t^2-1}{4t+3} \cdot \frac{2t^2+3t+2}{4t+3}} \cdot \frac{2(2t^2+3t+2)}{(4t+3)^2} dt \\ &= \int \frac{2}{t^2-1} dt \\ &= \int \frac{2}{(t-1)(t+1)} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \log|t-1| - \log|t+1| \end{aligned}$$

3

$$f = x^2y + y^3 - x^2 - 2y^2 - 2xy + 2x + y$$

$$(1) \begin{cases} f_x = 2xy - 2x - 2y + 2 = 0 & \text{--- ①} \\ f_y = x^2 + 3y^2 - 4y - 2x + 1 = 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\text{①より } 2x(y-1) - 2(y-1) = 0$$

$$2(x-1)(y-1) = 0 \therefore x=1 \text{ or } y=1$$

$$x=1 \text{ のとき, ②より}$$

$$1 + 3y^2 - 4y - 2 + 1 = 0$$

$$y(3y-4) = 0 \therefore y=0, \frac{4}{3}$$

$$y=1 \text{ のとき, ②より}$$

$$x^2 + 3 - 4 - 2x + 1 = 0$$

$$x(x-2) = 0 \therefore x=0, 2$$

$$\therefore 2, \text{ 停留点は}$$

$$(1, 0), (1, \frac{4}{3}), (0, 1), (2, 1)$$

$$(2) f_{xx} = 2y - 2, f_{yy} = 6y - 4, f_{xy} = 2x - 2$$

$$H = (2y-2)(6y-4) - (2x-2)^2$$

$$\cdot H(1, 0) = (-2) \cdot (-4) - 0^2 = 8 > 0, f_{xx}(1, 0) = -2 < 0$$

$$\therefore f(1, 0) = 1 : \text{極大値}$$

$$\cdot H(1, \frac{4}{3}) = \frac{2}{3} \cdot 4 - 0^2 = \frac{8}{3} > 0, f_{xx}(1, \frac{4}{3}) = \frac{2}{3} > 0$$

$$\therefore f(1, \frac{4}{3}) = -\frac{5}{27} : \text{極小値}$$

$$\cdot H(0, 1) = 0 \cdot 2 - (-2)^2 = -4 < 0$$

$$\therefore f(0, 1) : \text{極大値ではない}$$

$$\cdot H(2, 1) = 0 \cdot 2 - 2^2 = -4 < 0$$

$$\therefore f(2, 1) : \text{極大値ではない}$$

4

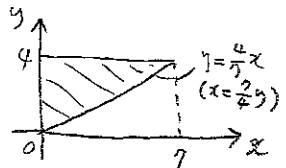
$$\begin{aligned}
 (1) \int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x \arctan x \, dx \\
 &= \left[(x^2+1) \arctan x - x \right]_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
 &= \left\{ \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{6} - 4 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} - \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} - (-\sqrt{3}) \right\} \\
 &= \frac{14}{9} \pi - \frac{4}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\arctan x \quad \begin{matrix} \nearrow x^2+1 \\ \searrow 2x \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int_{-1}^2 \left\{ \int_{-1}^{x^2} (3x-5y) \, dx \right\} dy \\
 &= \int_{-1}^2 \left[3xy - \frac{5}{2} y^2 \right]_{y=-1}^{y=x^2} dx \\
 &= \int_{-1}^2 \left[3x \{ x^2 - (-1) \} - \frac{5}{2} (x^4 - 1) \right] dx \\
 &= \int_{-1}^2 \left(-\frac{5}{2} x^4 + 3x^3 + 3x + \frac{5}{2} \right) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{2} x^5 + \frac{3}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{5}{2} x \right]_{-1}^2 \\
 &= -\frac{1}{2} \{ 32 - (-1) \} + \frac{3}{4} (16 - 1) + \frac{3}{2} (4 - 1) + \frac{5}{2} \{ 2 - (-1) \} \\
 &= \frac{27}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_1^2 \left(\int_x^{x^3} \frac{x^2}{y^2} \, dy \right) dx \\
 &= \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{y=x}^{y=x^3} dx \\
 &= \int_1^2 -x^2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} \right) dx \\
 &= \int_1^2 \left(-\frac{1}{x} + x \right) dx \\
 &= \left[-\log x + \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \\
 &= -(\log 2 - 0) + \frac{1}{2} (4 - 1) \\
 &= \frac{3}{2} - \log 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int_0^1 \left\{ \int_0^x (x+1) e^{2y} \, dy \right\} dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (x+1) e^{2y} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2} (x+1) (e^{2x} - 1) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \{ (x+1) e^{2x} - (x+1) \} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (x+1) e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} (x+1)^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (2e^2 - 1 \cdot 1) - \frac{1}{4} (e^2 - 1) - \frac{1}{2} (4 - 1) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} e^2 - \frac{7}{4} \right) \\
 &= \frac{3}{8} e^2 - \frac{7}{8}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (5) \int_0^7 \left(\int_{\frac{4}{7}x}^4 \frac{y}{\sqrt{y^3+36}} \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^4 \left(\int_0^{\frac{7}{4}y} \frac{y}{\sqrt{y^3+36}} \, dx \right) dy \\
 &= \int_0^4 \left[\frac{xy}{\sqrt{y^3+36}} \right]_{x=0}^{x=\frac{7}{4}y} dy \\
 &= \int_0^4 \frac{7y^2}{4\sqrt{y^3+36}} \, dy \\
 &= \frac{7}{12} \int_0^4 (y^3+36)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3y^2 \, dy \\
 &= \frac{7}{12} \left[2(y^3+36)^{\frac{1}{2}} \right]_0^4 \\
 &= \frac{7}{6} (10 - 6) \\
 &= \frac{14}{3}
 \end{aligned}$$