科目名	数学A	対象	1A-2	学部研究科	工学部第二部	学科専攻科		学籍番号		評点
平成 26 年 1 月 22 日 (水) 2 回目 (～ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験時間	60 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

2013 年度 A 科 2 組　後期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C の値を求めよ．**(1) は答のみでよい．**

$$\frac{-x^2+27x-38}{(x+4)(x^2-6x+14)} = \frac{A}{x+4} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+14}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{-x^2+27x-38}{(x+4)(x^2-6x+14)}dx$ を求めよ．

$\boxed{2}$ $\sqrt{4x^2-9x+4}+2x=t$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{2}{x\sqrt{4x^2-9x+4}}dx$ を求めよ．

$\boxed{3}$ $f(x,y) = x^2y+y^3+x^2+2y^2-2xy-2x+y$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．**(1) は答のみでよい．**

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

※ $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0 \implies f(a,b)$：極小値
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0 \implies f(a,b)$：極大値
$H(a,b)<0 \implies f(a,b)$：極値でない
ただし $H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$ とする．

$\boxed{4}$ 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2x\arctan x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_{-1}^{x^2}(3y-2x)dy\right\}dx$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{7}\left(\int_{1}^{x}\log y\,dy\right)dx$　　(4) $\displaystyle\int_{0}^{5}\left\{\int_{\frac{4}{5}x}^{4} y(y^3+36)^{-\frac{3}{2}}dy\right\}dx$　(順序変更)

(5) $\displaystyle\int\!\!\int_D (5x-3y)dxdy$　　$(D : x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

東京理科大学 平成 年 月 日 **試験答案**

科目名		担当 先生	評点
該当学部を○で囲む	理学部 1 / 工学部 2 部 学科 年 番	氏名 A－2	

□1

(1) 分母をはらうと

$-x^2+27x-38 = A(x^2-6x+14)+(Bx+C)(x+4)$

・$x=-4$ … $-162 = 54A$ ∴ $A=-3$

・$x=0$ … $-38 = 14A+4C$

$-38 = -42+4C$ ∴ $C=1$

・$x=1$ … $-12 = 9A+5(B+C)$

$-12 = -27+5B+5$ ∴ $B=2$

よって $(A,B,C)=(-3,2,1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{-x^2+27x-38}{(x+4)(x^2-6x+14)}dx$

$\displaystyle = \int \left(-\frac{3}{x+4}+\frac{2x+1}{x^2-6x+14}\right)dx$

$\displaystyle = \int \left\{-\frac{3}{x+4}+\frac{2x-6}{x^2-6x+14}+\frac{7}{(\sqrt{5})^2+(x-3)^2}\right\}dx$

$\displaystyle = -3\log|x+4|+\log(x^2-6x+14)+\frac{7}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x-3}{\sqrt{5}}$

□2

$\sqrt{4x^2-9x+4} = t-2x$ の両辺を2乗すると

$4x^2-9x+4 = t^2-4tx+4x^2$

$(4t-9)x = t^2-4$ ∴ $x=\dfrac{t^2-4}{4t-9}$

また

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t\cdot(4t-9)-(t^2-4)\cdot 4}{(4t-9)^2} = \dfrac{2(2t^2-9t+8)}{(4t-9)^2}$

さらに

$\sqrt{4x^2-9x+4} = t-\dfrac{2(t^2-4)}{4t-9} = \dfrac{2t^2-9t+8}{4t-9}$

よって

$\displaystyle\int\frac{2}{x\sqrt{4x^2-9x+4}}dx = \int \frac{2}{\frac{t^2-4}{4t-9}\cdot\frac{2t^2-9t+8}{4t-9}}\cdot\frac{2(2t^2-9t+8)}{(4t-9)^2}dt$

$\displaystyle = \int\frac{4}{t^2-4}dt$

$\displaystyle = \int\frac{4}{(t-2)(t+2)}dt$

$\displaystyle = \int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt$

$= \log|t-2|-\log|t+2|$

□3

$f = x^2y+y^3+x^2+2y^2-2xy-2x+y$

(1) $\begin{cases} f_x = 2xy+2x-2y-2=0 & \text{—①} \\ f_y = x^2+3y^2+4y-2x+1=0 & \text{—②}\end{cases}$

①より $2x(y+1)-2(y+1)=0$

$2(x-1)(y+1)=0$ ∴ $x=1$ or $y=-1$

$x=1$ のとき，②より

$1+3y^2+4y-2+1=0$

$y(3y+4)=0$ ∴ $y=0, -\dfrac{4}{3}$

$y=-1$ のとき，②より

$x^2+3-4-2x+1=0$

$x(x-2)=0$ ∴ $x=0, 2$

よって，停留点は

$(1,0), \left(1,-\dfrac{4}{3}\right), (0,-1), (2,-1)$

(2) $f_{xx}=2y+2$, $f_{yy}=6y+4$, $f_{xy}=2x-2$

$H=(2y+2)(6y+4)-(2x-2)^2$

・$H(1,0) = 2\cdot 4-0^2 = 8>0$, $f_{xx}(1,0)=2>0$

∴ $f(1,0)=-1$: 極小値

・$H\left(1,-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(-4)-0^2 = \frac{8}{3}>0$, $f_{xx}\left(1,-\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}<0$

∴ $f\left(1,-\frac{4}{3}\right) = \dfrac{5}{27}$: 極大値

・$H(0,-1) = 0\cdot(-2)-(-2)^2 = -4<0$

∴ $f(0,-1)$: 極値でない

・$H(2,-1) = 0\cdot(-2)-2^2 = -4<0$

∴ $f(2,-1)$: 極値でない．

$\boxed{4}$

(1) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2x\arctan x\,dx$

$\arctan x \quad x^2+1$

$\frac{1}{1+x^2} \quad 2x$

$= \left[(x^2+1)\arctan x - x\right]_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= \left\{\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{6} - 4\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} - \left\{\frac{1}{\sqrt{3}} - (-\sqrt{3})\right\}$

$= \frac{14}{9}\pi - \frac{4}{\sqrt{3}}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_{-1}^{x^2}(3y-2x)\,dy\right\}dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^{2}\left[\frac{3}{2}y^2 - 2xy\right]_{y=-1}^{y=x^2}dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^{2}\left[\frac{3}{2}(x^4-1) - 2x\{x^2-(-1)\}\right]dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^{2}\left(\frac{3}{2}x^4 - 2x^3 - 2x - \frac{3}{2}\right)dx$

$= \left[\frac{3}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{3}{2}x\right]_{-1}^{2}$

$= \frac{3}{10}\{32-(-1)\} - \frac{1}{2}(16-1) - (4-1) - \frac{3}{2}\{2-(-1)\}$

$= -\frac{51}{10}$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{7}\left(\int_{1}^{x}\log y\,dy\right)dx$

$= \displaystyle\int_{1}^{7}\left[y\log y - y\right]_{y=1}^{y=x}dx$

$= \displaystyle\int_{1}^{7}\{(x\log x - 1\cdot 0) - (x-1)\}dx$

$= \displaystyle\int_{1}^{7}\{x\log x - (x-1)\}dx$

$\log x \quad \frac{1}{2}x^2$

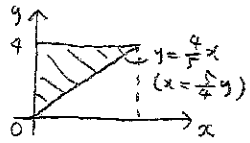
$\frac{1}{x} \quad x$

$= \left[\left(\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2\right) - \frac{1}{2}(x-1)^2\right]_{1}^{7}$

$= \frac{1}{2}(49\log 7 - 1\cdot 0) - \frac{1}{4}(49-1) - \frac{1}{2}(36-0)$

$= \frac{49}{2}\log 7 - 30$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{5}\left\{\int_{\frac{4}{5}x}^{4} y(y^3+36)^{-\frac{3}{2}}dy\right\}dx$



$= \displaystyle\int_{0}^{4}\left\{\int_{0}^{\frac{5}{4}y} y(y^3+36)^{-\frac{3}{2}}dx\right\}dy$

$= \displaystyle\int_{0}^{4}\left[xy(y^3+36)^{-\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=\frac{5}{4}y}dy$

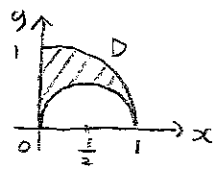
$= \displaystyle\int_{0}^{4}\frac{5}{4}y^2(y^3+36)^{-\frac{3}{2}}dy$

$= \frac{5}{12}\displaystyle\int_{0}^{4}(y^3+36)^{-\frac{3}{2}}\cdot 3y^2\,dy$

$= \frac{5}{12}\left[-2(y^3+36)^{-\frac{1}{2}}\right]_{0}^{4}$

$= -\frac{5}{6}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6}\right)$

$= \frac{1}{18}$



(5) $\displaystyle\iint_D (5x-3y)\,dxdy \quad (D: x\leq x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0)$

$= \displaystyle\iint_{D'}(5r\cos\theta - 3r\sin\theta)\cdot r\,drd\theta \quad \left(D': 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\ \cos\theta\leq r\leq 1\right)$

$= \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_{\cos\theta}^{1} r^2(5\cos\theta - 3\sin\theta)\,dr\right\}d\theta$

$= \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}(5\cos\theta - 3\sin\theta)\right]_{r=\cos\theta}^{r=1}d\theta$

$= \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(1-\cos^3\theta)(5\cos\theta - 3\sin\theta)\,d\theta$

$= \frac{1}{3}\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\{5\cos\theta - 3\sin\theta - 5\cos^4\theta - 3\cos^3\theta\cdot(-\sin\theta)\}d\theta$

$= \frac{1}{3}\left(5\cdot 1 - 3\cdot 1 - 5\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} - \left[\frac{3}{4}\cos^4\theta\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right)$

$= \frac{1}{3}\left\{2 - \frac{15}{16}\pi - \frac{3}{4}(0-1)\right\}$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{11}{4} - \frac{15}{16}\pi\right)$

$= \frac{11}{12} - \frac{5}{16}\pi$