

科目名	数学A	対象	1A-1	学部 研究科	工学部第二部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 27 年 1 月 21 日 (水)	3 回目	(~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名			
試験 時間	60 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照持込可 ()							

2014 年度 A 科 1 組 後期試験

※解答用紙の裏面使用可

- 1 (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C の値を求めよ. (1) は答のみでよい.

$$\frac{x^2 + 7x - 31}{(x+2)(x^2 - 8x + 21)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2 - 8x + 21}$$

(2) $\int \frac{x^2 + 7x - 31}{(x+2)(x^2 - 8x + 21)} dx$ を求めよ.

- 2 $\sqrt{4x^2 - 7x + 1} + 2x = t$ とおくことにより, $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 7x + 1}} dx$ を求めよ.

- 3 $f(x, y) = -x^2y - y^3 - x^2 - 4y^2 + 2xy + 2x - 5y$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ. (1) は答のみでよい.

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

※ $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) : \text{極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極大値}$

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする.

- 4 次の積分を求めよ.

(1) $\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} 2x \arctan x dx$

(2) $\int_{-2}^1 \left\{ \int_{-1}^{x^2} (3x + 7y) dy \right\} dx$

(3) $\int_2^4 \left(\int_{x^4}^{x^7} \frac{x^6}{y^2} dy \right) dx$

(4) $\int_0^1 \left\{ \int_0^x (x+2)e^{2y} dy \right\} dx$

(5) $\int_0^7 \left\{ \int_{\frac{2}{7}x}^2 y(y^3 + 1)^{-\frac{3}{2}} dy \right\} dx$ (順序変更)

科目名		担当	先生
理学部	1	氏	
工学部	2	名	A-1

[1]

$$(1) \frac{x^2+7x-31}{(x+2)(x^2-8x+21)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-8x+21} \text{ の分母をそろえて}$$

$$x^2+7x-31 = A(x^2-8x+21) + (Bx+C)(x+2)$$

$$\cdot x=-2 \text{ を代入 } -41 = 41A \therefore A=-1$$

$$\cdot x=0 \text{ を代入 } -31 = 21A+2C$$

$$-31 = -21 + 2C \therefore C=-5$$

$$\cdot x=1 \text{ を代入 } -23 = 14A+3(B+C)$$

$$-23 = -14 + 3(B-5) \therefore B=2$$

$$\therefore 2, A=-1, B=2, C=-5$$

$$(2) \int \frac{x^2+7x-31}{(x+2)(x^2-8x+21)} dx$$

$$= \int \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{2x-5}{x^2-8x+21} \right) dx$$

$$= \int \left\{ -\frac{1}{x+2} + \frac{(2x-8)+3}{x^2-8x+21} \right\} dx$$

$$= \int \left\{ -\frac{1}{x+2} + \frac{2x-8}{x^2-8x+21} + \frac{3}{(\sqrt{5})^2+(x-4)^2} \right\} dx$$

$$= -\log|x+2| + \log(x^2-8x+21) + \frac{3}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x-4}{\sqrt{5}}$$

[2]

$$\sqrt{4x^2-7x+1} + 2x = t \text{ とおくと } \sqrt{4x^2-7x+1} = t-2x$$

両辺2乗して

$$4x^2-7x+1 = t^2-4tx+4x^2$$

$$(4t-7)x = t^2-1$$

$$\therefore x = \frac{t^2-1}{4t-7}$$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot (4t-7) - (t^2-1) \cdot 4}{(4t-7)^2} = \frac{2(2t^2-7t+2)}{(4t-7)^2}$$

さらに

$$\sqrt{4x^2-7x+1} = t-2x = t - \frac{2(t^2-1)}{4t-7} = \frac{2t^2-7t+2}{4t-7}$$

よって

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-7x+1}} dx = \int \frac{1}{\frac{t^2-1}{4t-7} \cdot \frac{2t^2-7t+2}{4t-7}} \cdot \frac{2(2t^2-7t+2)}{(4t-7)^2} dt$$

$$= \int \frac{2}{t^2-1} dt$$

$$= \int \frac{2}{(t-1)(t+1)} dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= \log|t-1| - \log|t+1|$$

[3]

$$f(x,y) = -x^2y - y^3 - x^2 - 4y^2 + 2xy + 2x - 5y$$

$$(1) \begin{cases} f_x(x,y) = -2xy - 2x + 2y + 2 = 0 \quad \dots \textcircled{1} \\ f_y(x,y) = -x^2 - 3y^2 - 8y + 2x - 5 = 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①より

$$-2x(y+1) + 2(y+1) = 0$$

$$-2(x-1)(y+1) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ または } y=-1$$

(i) $x=1$ のとき, ②より

$$-1 - 3y^2 - 8y + 2 - 5 = 0$$

$$3y^2 + 8y + 4 = 0$$

$$(y+2)(3y+2) = 0 \therefore y = -2, -\frac{2}{3}$$

(ii) $y=-1$ のとき, ②より

$$-x^2 - 3 + 8 + 2x - 5 = 0$$

$$-x(x-2) = 0 \therefore x = 0, 2$$

以上(i),(ii)より, 停留点は

$$(1, -2), (1, -\frac{2}{3}), (0, -1), (2, -1)$$

$$(2) f_{xx}(x,y) = -2y-2, f_{yy}(x,y) = -6y-8, f_{xy}(x,y) = -2x+2$$

$$H(x,y) = (-2y-2)(-6y-8) - (-2x+2)^2$$

$$\cdot H(1, -2) = 2 \cdot 4 - 0^2 = 8 > 0, f_{xx}(1, -2) = 2 > 0$$

$$\therefore f(1, -2) = 1 : \text{極小値}$$

$$\cdot H(1, -\frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3}) \cdot (-4) - 0^2 = \frac{8}{3} > 0, f_{xx}(1, -\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3} < 0$$

$$\therefore f(1, -\frac{2}{3}) = \frac{59}{27} : \text{極大値}$$

$$\cdot H(0, -1) = 0 \cdot (-2) - 2^2 = -4 < 0$$

$$\therefore f(0, -1) : \text{極値ではない}$$

$$\cdot H(2, -1) = 0 \cdot (-2) - (-2)^2 = -4 < 0$$

$$\therefore f(2, -1) : \text{極値ではない}$$

4

$$(1) \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} 2x \arctan x dx$$

$$\arctan x \begin{matrix} \nearrow x^2+1 \\ \searrow \frac{1}{1+x^2} \end{matrix}$$

$$= \left[(x^2+1) \arctan x \right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} - \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} dx$$

$$= \left\{ 4 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) \right\} - \left\{ \sqrt{3} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}$$

$$= \frac{14}{9} \pi - \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$(2) \int_{-2}^1 \left\{ \int_{-1}^{x^2} (3x+7y) dy \right\} dx$$

$$= \int_{-2}^1 \left[3xy + \frac{7}{2} y^2 \right]_{y=-1}^{y=x^2} dx$$

$$= \int_{-2}^1 \left\{ \left(3x^3 + \frac{7}{2} x^4 \right) - \left(-3x + \frac{7}{2} \right) \right\} dx$$

$$= \left[\frac{3}{4} x^4 + \frac{7}{10} x^5 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{7}{2} x \right]_{-2}^1$$

$$= \frac{3}{4}(1-16) + \frac{7}{10}\{1-(-32)\} + \frac{3}{2}(1-4) - \frac{7}{2}\{1-(-2)\}$$

$$= -\frac{63}{20}$$

$$(3) \int_2^4 \left(\int_{x^2}^{x^9} \frac{x^6}{y^2} dy \right) dx = \int_2^4 \left[-\frac{x^6}{y} \right]_{y=x^2}^{y=x^9} dx$$

$$= \int_2^4 \left\{ -\frac{1}{x} - (-x^2) \right\} dx$$

$$= \left[-\log x + \frac{1}{3} x^3 \right]_2^4$$

$$= -(\log 4 - \log 2) + \frac{1}{3}(64-8)$$

$$= -\log 2 + \frac{56}{3}$$

$$(4) \int_0^1 \left\{ \int_0^x (x+2) e^{2y} dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (x+2) e^{2y} \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$\frac{1}{2}(x+2) \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{2} e^{2x} \\ \searrow \frac{1}{2} \end{matrix} e^{2x}$$

$$= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} (x+2) e^{2x} - \frac{1}{2} (x+2) \cdot 1 \right\} dx$$

$$= \left\{ \left[\frac{1}{4} (x+2) e^{2x} \right]_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 e^{2x} dx \right\} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}(3 \cdot e^2 - 2 \cdot 1) - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 2 \right)$$

$$= \frac{3}{4} e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} (e^2 - 1) - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{5}{8} e^2 - \frac{13}{8}$$

$$(5) \int_0^7 \left\{ \int_{\frac{2}{7}x}^2 y (y^3+1)^{-\frac{3}{2}} dy \right\} dx \dots (*)$$

積分領域は

$$D: 0 \leq x \leq 7, \frac{2}{7}x \leq y \leq 2$$

逆もあから、 $\frac{2}{7}x \leq y \leq 2$

$$D: 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \frac{7}{2}y$$

逆もあから

$$(*) = \int_0^2 \left\{ \int_0^{\frac{7}{2}y} y (y^3+1)^{-\frac{3}{2}} dx \right\} dy$$

$$= \int_0^2 \left[x y (y^3+1)^{-\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=\frac{7}{2}y} dy$$

$$= \int_0^2 \frac{7}{2} y^2 (y^3+1)^{-\frac{3}{2}} dy$$

$$= \frac{7}{6} \int_0^2 (y^3+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3y^2 dy$$

$$= \frac{7}{6} \left[-2 (y^3+1)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^2$$

$$= -\frac{7}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right)$$

$$= \frac{14}{9}$$

