

科目名	数学A	対象	1A-2	学部 研究科	工学部第二部	学科 専攻科		学籍 番号		評 点
平成 27 年 1 月 21 日 (水) 2 回目 (~ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏 名		
試験 時間	60 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照持込可 ()							

2014 年度 A 科 2 組 後期試験

※解答用紙の裏面使用可

- 1 (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C の値を求めよ. (1) は答のみでよい.

$$\frac{-x^2 - 20x - 54}{(x-3)(x^2 + 6x + 14)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2 + 6x + 14}$$

- (2) $\int \frac{-x^2 - 20x - 54}{(x-3)(x^2 + 6x + 14)} dx$ を求めよ.

- 2 $\sqrt{4x^2 + 3x + 9} + 2x = t$ とおくことにより, $\int \frac{3}{x\sqrt{4x^2 + 3x + 9}} dx$ を求めよ.

- 3 $f(x, y) = -x^2y - y^3 - \frac{2}{3}x^2 - 3y^2 + 2xy + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}y$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ. (1) は答のみでよい.

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

※ $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) : \text{極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極大値}$

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする.

- 4 次の積分を求めよ.

(1) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} 4x^3 \arctan x dx$

(2) $\int_{-1}^2 \left\{ \int_{-3}^{x^2} (3x + 2y) dy \right\} dx$

(3) $\int_1^5 \left(\int_1^x \log y dy \right) dx$

(4) $\int_0^4 \left\{ \int_{\frac{3}{4}x}^3 y(y^3 + 9)^{-\frac{3}{2}} dy \right\} dx$ (順序変更)

(5) $\int \int_D (7y - 4) dx dy$ ($D : x \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$)

科目名		担当先生	
学部	1 部	氏名	A-2
工学部	2 部		

1

$$(1) \frac{-x^2-20x-54}{(x-3)(x^2+6x+14)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+14}$$

$$-x^2-20x-54 = A(x^2+6x+14) + (Bx+C)(x-3)$$

$$\cdot x=3 \text{ 代入 } -123 = 41A \quad \therefore A = -3$$

$$\cdot x=0 \text{ 代入 } -54 = 14A - 3C$$

$$-54 = -42 - 3C \quad \therefore C = 4$$

$$\cdot x=1 \text{ 代入 } -75 = 21A - 2(B+C)$$

$$-75 = -63 - 2(B+4) \quad \therefore B = 2$$

$$\therefore A = -3, B = 2, C = 4$$

$$(2) \int \frac{-x^2-20x-54}{(x-3)(x^2+6x+14)} dx$$

$$= \int \left(-\frac{3}{x-3} + \frac{2x+4}{x^2+6x+14} \right) dx$$

$$= \int \left\{ -\frac{3}{x-3} + \frac{(2x+6)-2}{x^2+6x+14} \right\} dx$$

$$= \int \left\{ -\frac{3}{x-3} + \frac{2x+6}{x^2+6x+14} - \frac{2}{(\sqrt{5})^2+(x+3)^2} \right\} dx$$

$$= -3 \log|x-3| + \log(x^2+6x+14) - \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+3}{\sqrt{5}}$$

2

$$\sqrt{4x^2+3x+9} + 2x = t \quad \text{と置くと} \quad \sqrt{4x^2+3x+9} = t - 2x$$

両辺2乗して

$$4x^2+3x+9 = t^2 - 4tx + 4x^2$$

$$(4t+3)x = t^2 - 9$$

$$\therefore x = \frac{t^2-9}{4t+3}$$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot (4t+3) - (t^2-9) \cdot 4}{(4t+3)^2} = \frac{2(2t^2+3t+18)}{(4t+3)^2}$$

さらに

$$\sqrt{4x^2+3x+9} = t - 2x = t - \frac{2(t^2-9)}{4t+3} = \frac{2t^2+3t+18}{4t+3}$$

よって

$$\int \frac{3}{x\sqrt{4x^2+3x+9}} dx = \int \frac{3}{\frac{t^2-9}{4t+3} \cdot \frac{2t^2+3t+18}{4t+3}} \cdot \frac{2(2t^2+3t+18)}{(4t+3)^2} dt$$

$$= \int \frac{6}{t^2-9} dt$$

$$= \int \frac{6}{(t-3)(t+3)} dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3} \right) dt$$

$$= \log|t-3| - \log|t+3|$$

3

$$f(x,y) = -x^2y - y^3 - \frac{2}{3}x^2 - 3y^2 + 2xy + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}y$$

$$(1) \begin{cases} f_x(x,y) = -2xy - \frac{4}{3}x + 2y + \frac{4}{3} = 0 & \dots ① \\ f_y(x,y) = -x^2 - 3y^2 - 6y + 2x - \frac{8}{3} = 0 & \dots ② \end{cases}$$

①より

$$-2x(y + \frac{2}{3}) + 2(y + \frac{2}{3}) = 0$$

$$-2(x-1)(y + \frac{2}{3}) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ または } y = -\frac{2}{3}$$

(i) $x=1$ のとき, ②より

$$-1 - 3y^2 - 6y + 2 - \frac{8}{3} = 0$$

$$9y^2 + 18y + 5 = 0$$

$$(3y+5)(3y+1) = 0 \quad \therefore y = -\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}$$

(ii) $y = -\frac{2}{3}$ のとき, ②より

$$-x^2 - \frac{4}{3} + 4 + 2x - \frac{8}{3} = 0$$

$$-x(x-2) = 0 \quad \therefore x = 0, 2$$

以上(i), (ii)より, 停留点は

$$(1, -\frac{5}{3}), (1, -\frac{1}{3}), (0, -\frac{2}{3}), (2, -\frac{2}{3})$$

$$(2) f_{xx}(x,y) = -2y - \frac{4}{3}, f_{yy}(x,y) = -6y - 6, f_{xy}(x,y) = -2x + 2$$

$$H(x,y) = (-2y - \frac{4}{3})(-6y - 6) - (-2x + 2)^2$$

$$\cdot H(1, -\frac{5}{3}) = 2 \cdot 4 - 0^2 = 8 > 0, f_{xx}(1, -\frac{5}{3}) = 2 > 0$$

$$\therefore f(1, -\frac{5}{3}) = -\frac{7}{27} : \text{極小値}$$

$$\cdot H(1, -\frac{1}{3}) = (-\frac{2}{3}) \cdot (-4) - 0^2 = \frac{8}{3} > 0, f_{xx}(1, -\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3} < 0$$

$$\therefore f(1, -\frac{1}{3}) = \frac{25}{27} : \text{極大値}$$

$$\cdot H(0, -\frac{2}{3}) = 0 \cdot (-2) - 2^2 = -4 < 0$$

$$\therefore f(0, -\frac{2}{3}) : \text{極値ではない}$$

$$\cdot H(2, -\frac{2}{3}) = 0 \cdot (-2) - (-2)^2 = -4 < 0$$

$$\therefore f(2, -\frac{2}{3}) : \text{極値ではない}$$

4

$$\begin{aligned}
 (1) \int_{-1}^{\sqrt{3}} 4x^3 \arctan x \, dx \\
 &= [(x^4-1) \arctan x]_{-1}^{\sqrt{3}} - \int_{-1}^{\sqrt{3}} (x^2-1) \, dx \\
 &= \left\{ 8 \cdot \frac{\pi}{3} - 0 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\} - \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_{-1}^{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{8}{3} \pi - \left\{ (\sqrt{3}-\sqrt{3}) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) \right\} \\
 &= \frac{8}{3} \pi + \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\arctan x \begin{cases} x^4-1 \\ \frac{1}{1+x^2} \end{cases} \begin{cases} 4x^3 \\ 4x^3 \end{cases}$$

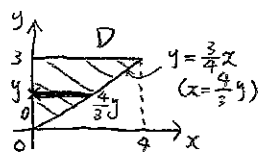
$$\begin{aligned}
 (2) \int_{-1}^2 \left\{ \int_{-3}^{x^2} (3x+2y) \, dy \right\} dx \\
 &= \int_{-1}^2 [3xy + y^2]_{y=-3}^{y=x^2} dx \\
 &= \int_{-1}^2 \{ (3x^3 + x^4) - (-9x + 9) \} dx \\
 &= \left[\frac{3}{4} x^4 + \frac{1}{5} x^5 + \frac{9}{2} x^2 - 9x \right]_{-1}^2 \\
 &= \frac{3}{4} (16-1) + \frac{1}{5} \{ 32 - (-1) \} + \frac{9}{2} (4-1) - 9 \{ 2 - (-1) \} \\
 &= \frac{87}{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_1^5 \left(\int_1^x \log y \, dy \right) dx \\
 &= \int_1^5 [y \log y - y]_{y=1}^{y=x} dx \\
 &= \int_1^5 \{ (x \log x - 1 \cdot 0) - (x-1) \} dx \\
 &= \left(\left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^5 - \frac{1}{2} \int_1^5 x \, dx \right) - \left[\frac{1}{2} (x-1)^2 \right]_1^5 \\
 &= \frac{1}{2} (25 \log 5 - 1 \cdot 0) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^5 - \frac{1}{2} (16-0) \\
 &= \frac{25}{2} \log 5 - \frac{1}{4} (25-1) - 8 \\
 &= \frac{25}{2} \log 5 - 14
 \end{aligned}$$

$$\log x \begin{cases} \frac{1}{2} x^2 \\ \frac{1}{2} x^2 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2} x^2 \\ x \end{cases}$$

$$(4) \int_0^4 \left\{ \int_{\frac{3}{4}x}^3 y(y^3+9)^{-\frac{3}{2}} \, dy \right\} dx \dots (*)$$

積分領域は



$$D: 0 \leq x \leq 4, \frac{3}{4}x \leq y \leq 3$$

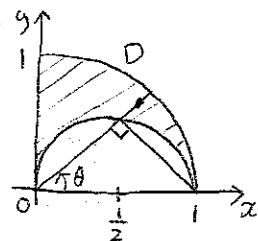
で表わすことができる

$$D: 0 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq \frac{4}{3}y$$

でも表わすことができる

$$\begin{aligned}
 (*) &= \int_0^3 \left\{ \int_0^{\frac{4}{3}y} y(y^3+9)^{-\frac{3}{2}} \, dx \right\} dy \\
 &= \int_0^3 [xy(y^3+9)^{-\frac{3}{2}}]_{x=0}^{x=\frac{4}{3}y} dy \\
 &= \int_0^3 \frac{4}{3} y^2 (y^3+9)^{-\frac{3}{2}} dy \\
 &= \frac{4}{9} \int_0^3 (y^3+9)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3y^2 dy \\
 &= \frac{4}{9} \left[-2(y^3+9)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^3 \\
 &= -\frac{8}{9} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{4}{27}
 \end{aligned}$$

$$(5) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \begin{cases} r \geq 0 \\ \theta: 1/\sqrt{2} \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases} \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 \iint_D (7y-4) \, dx \, dy \\
 (D: x \leq x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0) \\
 &= \iint_{D'} (7r \sin \theta - 4) \cdot r \, dr \, d\theta \quad (D': 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \cos \theta \leq r \leq 1) \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{\cos \theta}^1 (7r^2 \sin \theta - 4r) \, dr \right\} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{7}{3} r^3 \sin \theta - 2r^2 \right]_{r=\cos \theta}^{r=1} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{7}{3} (1 - \cos^3 \theta) \sin \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \right\} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{7}{3} \sin \theta + \frac{7}{3} \cos^3 \theta \cdot (-\sin \theta) - 2 \sin^2 \theta \right\} d\theta \\
 &= \left(\frac{7}{3} \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) + \frac{7}{3} \left[\frac{1}{4} \cos^4 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{7}{3} - \frac{\pi}{2} + \frac{7}{12} (0-1) \\
 &= \frac{7}{4} - \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$