科目名	数学A	対象	1A-1	学部研究科	工学部第二部	学科専攻科		学籍番号		評点
平成 28 年 1 月 20 日 (水) 3 回目 (～ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験時間	60 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

2015 年度 A 科 1 組　後期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C の値を求めよ．(1) は答のみでよい．

$$\frac{-x^2+27x-51}{(x+6)(x^2-6x+11)} = \frac{A}{x+6} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+11}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{-x^2+27x-51}{(x+6)(x^2-6x+11)}dx$ を求めよ．

$\boxed{2}$ $\sqrt{9x^2-7x+1}+3x=t$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{9x^2-7x+1}}dx$ を求めよ．

$\boxed{3}$ $f(x,y) = x^3+xy^2-3x^2-\dfrac{2}{3}y^2-2xy+\dfrac{8}{3}x+\dfrac{4}{3}y$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．(1) は答のみでよい．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

※ $f_x(a,b)=0$，$f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0$，$f_{xx}(a,b)>0 \implies f(a,b)$：極小値
$H(a,b)>0$，$f_{xx}(a,b)<0 \implies f(a,b)$：極大値
$H(a,b)<0 \implies f(a,b)$：極値でない
ただし $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$ とする．

$\boxed{4}$ 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{0} 2x\arctan x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_{-1}^{x^2}(2y-x)dy\right\}dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{3}\left(\int_{0}^{x} xe^y dy\right)dx$

(4) $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(\int_{x}^{x^2}\frac{x}{y}dy\right)dx$

(5) $\displaystyle\int_{0}^{5}\left\{\int_{\frac{2}{5}x}^{2} y^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}dy\right\}dx$ （順序変更）

試験答案

東京理科大学 平成 年 月 日

科目名		担当	先生	評点
該当学部を○で囲む	理学部 1 / 工学部 2	部 学科 年 番	氏名 A − 1	

1

(1) $\dfrac{-x^2+27x-51}{(x+6)(x^2-6x+11)}=\dfrac{A}{x+6}+\dfrac{Bx+C}{x^2-6x+11}$ の分母をはらうと

$$-x^2+27x-51=A(x^2-6x+11)+(Bx+C)(x+6)$$

・$x=-6$ 代入 $\quad -249=83A \quad \therefore A=-3$

・$x=0$ 代入 $\quad -51=11A+6C$

$-51=-33+6C \quad \therefore C=-3$

・$x=1$ 代入 $\quad -25=6A+7(B+C)$

$-25=-18+7(B-3) \quad \therefore B=2$

よって，$A=-3$，$B=2$，$C=-3$

(2) (1)の結果より

$$\int\frac{-x^2+27x-51}{(x+6)(x^2-6x+11)}dx$$

$$=\int\left(-\frac{3}{x+6}+\frac{2x-3}{x^2-6x+11}\right)dx$$

$$=\int\left\{-\frac{3}{x+6}+\frac{(2x-6)+3}{x^2-6x+11}\right\}dx$$

$$=\int\left\{-\frac{3}{x+6}+\frac{2x-6}{x^2-6x+11}+\frac{3}{(\sqrt{2})^2+(x-3)^2}\right\}dx$$

$$=-3\log|x+6|+\log(x^2-6x+11)+\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-3}{\sqrt{2}}$$

2

$\sqrt{9x^2-7x+1}+3x=t$ とおくと $\sqrt{9x^2-7x+1}=t-3x$

両辺2乗して

$$9x^2-7x+1=t^2-6tx+9x^2 \qquad \therefore x=\frac{t^2-1}{6t-7}$$

また

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t\cdot(6t-7)-(t^2-1)\cdot 6}{(6t-7)^2}=\frac{2(3t^2-7t+3)}{(6t-7)^2}$$

さらに

$$\sqrt{9x^2-7x+1}=t-3x=t-\frac{3(t^2-1)}{6t-7}=\frac{3t^2-7t+3}{6t-7}$$

よって

$$\int\frac{1}{x\sqrt{9x^2-7x+1}}dx=\int\frac{1}{\frac{t^2-1}{6t-7}\cdot\frac{3t^2-7t+3}{6t-7}}\cdot\frac{2(3t^2-7t+3)}{(6t-7)^2}dt$$

$$=\int\frac{2}{t^2-1}dt$$

$$=\int\frac{2}{(t-1)(t+1)}dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\log|t-1|-\log|t+1|$$

3

$$f(x,y)=x^3+xy^2-3x^2-\frac{2}{3}y^2-2xy+\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}y$$

(1) $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+y^2-6x-2y+\frac{8}{3}=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=2xy-\frac{4}{3}y-2x+\frac{4}{3}=0 & \cdots ② \end{cases}$

②より $\quad 2\left(x-\frac{2}{3}\right)y-2\left(x-\frac{2}{3}\right)=0$

$2\left(x-\frac{2}{3}\right)(y-1)=0$

$\therefore x=\frac{2}{3}$ または $y=1$

(i) $x=\frac{2}{3}$ のとき，①より

$\frac{4}{3}+y^2-4-2y+\frac{8}{3}=0$

$y^2-2y=0$

$y(y-2)=0$

$\therefore y=0,2$

(ii) $y=1$ のとき，①より

$3x^2+1-6x-2+\frac{8}{3}=0$

$9x^2-18x+5=0$

$(3x-1)(3x-5)=0$

$\therefore x=\frac{1}{3},\frac{5}{3}$

以上(i),(ii)より，停留点は

$\left(\frac{2}{3},0\right),\left(\frac{2}{3},2\right),\left(\frac{1}{3},1\right),\left(\frac{5}{3},1\right)$

(2) $f_{xx}(x,y)=6x-6$，$f_{yy}(x,y)=2x-\frac{4}{3}$，$f_{xy}(x,y)=2y-2$

$H(x,y)=(6x-6)\left(2x-\frac{4}{3}\right)-(2y-2)^2$

・$H\left(\frac{2}{3},0\right)=(-2)\cdot 0-(-2)^2=-4<0$

$\therefore f\left(\frac{2}{3},0\right)$：極値でない

・$H\left(\frac{2}{3},2\right)=(-2)\cdot 0-2^2=-4<0$

$\therefore f\left(\frac{2}{3},2\right)$：極値でない

・$H\left(\frac{1}{3},1\right)=(-4)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-0^2=\frac{8}{3}>0$，$f_{xx}\left(\frac{1}{3},1\right)=-4<0$

$\therefore f\left(\frac{1}{3},1\right)=\frac{25}{27}$：極大値

・$H\left(\frac{5}{3},1\right)=4\cdot 2-0^2=8>0$，$f_{xx}\left(\frac{5}{3},1\right)=4>0$

$\therefore f\left(\frac{5}{3},1\right)=-\frac{7}{27}$：極小値

$\boxed{4}$

(1) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{0} 2x\arctan x\,dx$ $\qquad \begin{matrix}\arctan x & \times & x^2+1\\ \frac{1}{1+x^2} & & 2x\end{matrix}$

$\displaystyle = \Big[(x^2+1)\arctan x\Big]_{-\sqrt{3}}^{0} - \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx$

$\displaystyle = \left\{1\cdot 0 - 4\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} - \Big[x\Big]_{-\sqrt{3}}^{0}$

$\displaystyle = \frac{4}{3}\pi - \{0-(-\sqrt{3})\}$

$\displaystyle = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_{-1}^{x^2}(2y-x)\,dy\right\}dx$

$\displaystyle = \int_{-1}^{2}\Big[y^2 - xy\Big]_{y=-1}^{y=x^2} dx$

$\displaystyle = \int_{-1}^{2}\{(x^4-x^3)-(1+x)\}dx$

$\displaystyle = \int_{-1}^{2}(x^4-x^3-x-1)\,dx$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-1}^{2}$

$\displaystyle = \left(\frac{32}{5}-4-2-2\right) - \left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right)$

$\displaystyle = -\frac{33}{20}$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{3}\left(\int_{0}^{x} xe^{y}\,dy\right)dx$

$\displaystyle = \int_{0}^{3}\Big[xe^{y}\Big]_{y=0}^{y=x} dx$

$\displaystyle = \int_{0}^{3} x(e^{x}-1)\,dx$ $\qquad \begin{matrix}x & \times & e^x\\ 1 & & e^x\end{matrix}$

$\displaystyle = \int_{0}^{3}(xe^{x} - x)\,dx$

$\displaystyle = \left(\Big[xe^{x}\Big]_{0}^{3} - \int_{0}^{3} e^{x}dx\right) - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{3}$

$\displaystyle = (3e^3 - 0\cdot 1) - \Big[e^{x}\Big]_{0}^{3} - \frac{9}{2}$

$\displaystyle = 3e^3 - (e^3-1) - \frac{9}{2}$

$\displaystyle = 2e^3 - \frac{7}{2}$

(4) $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(\int_{x}^{x^2}\frac{x}{y}\,dy\right)dx$

$\displaystyle = \int_{1}^{2}\Big[x\log y\Big]_{y=x}^{y=x^2} dx$

$\displaystyle = \int_{1}^{2} x(\log x^2 - \log x)\,dx$

$\displaystyle = \int_{1}^{2} x\log x\,dx$ $\qquad \begin{matrix}\log x & \times & \frac{1}{2}x^2\\ \frac{1}{x} & & x\end{matrix}$

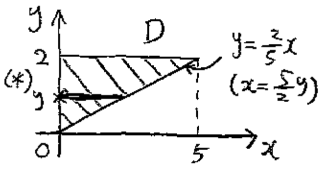
$\displaystyle = \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_{1}^{2} - \frac{1}{2}\int_{1}^{2} x\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}(4\log 2 - 1\cdot 0) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{2}$

$\displaystyle = 2\log 2 - \frac{1}{4}(4-1)$

$\displaystyle = 2\log 2 - \frac{3}{4}$

(5) $\displaystyle\int_{0}^{5}\left\{\int_{\frac{2}{5}x}^{2} y^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}\,dy\right\}dx \cdots (*)$



積分領域は

$D:\ 0 \leqq x \leqq 5,\ \frac{2}{5}x \leqq y \leqq 2$

であるが、これは

$D:\ 0 \leqq y \leqq 2,\ 0 \leqq x \leqq \frac{5}{2}y$

でもあるから

$\displaystyle (*) = \int_{0}^{2}\left\{\int_{0}^{\frac{5}{2}y} y^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}\,dx\right\}dy$

$\displaystyle = \int_{0}^{2}\Big[xy^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}\Big]_{x=0}^{x=\frac{5}{2}y} dy$

$\displaystyle = \int_{0}^{2}\frac{5}{2}y^3(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}\,dy$

$\displaystyle = \frac{5}{8}\int_{0}^{2}(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}\cdot 4y^3\,dy$

$\displaystyle = \frac{5}{8}\Big[-2(y^4+9)^{-\frac{1}{2}}\Big]_{0}^{2}$

$\displaystyle = -\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{6}$