科目名	数学A	対象	1A-2	学部研究科	工学部第二部	学科専攻科		学籍番号		評点
平成 28 年 1 月 20 日 (水) 2 回目 (～ 時限目)		担当	石川 学	学年		氏名				
試験時間	60 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

2015 年度 A 科 2 組　後期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C の値を求めよ．(1) は答のみでよい．

$$\frac{-x^2+37x-114}{(x+6)(x^2-10x+28)} = \frac{A}{x+6} + \frac{Bx+C}{x^2-10x+28}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{-x^2+37x-114}{(x+6)(x^2-10x+28)}dx$ を求めよ．

$\boxed{2}$ $\sqrt{9x^2-7x+4}+3x=t$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{2}{x\sqrt{9x^2-7x+4}}dx$ を求めよ．

$\boxed{3}$ $f(x,y) = x^3+xy^2-3x^2-\frac{2}{3}y^2-2xy+\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}y$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．(1) は答のみでよい．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

※ $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0 \implies f(a,b)$: 極小値
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0 \implies f(a,b)$: 極大値
$H(a,b)<0 \implies f(a,b)$: 極値でない
ただし $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$ とする．

$\boxed{4}$ 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{1} 4x^3\arctan x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_{-3}^{x^2}(2x+y)dy\right\}dx$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{3}\left(\int_{x^2}^{x^3}\frac{x}{y}dy\right)dx$　　(4) $\displaystyle\int_{0}^{9}\left\{\int_{\frac{2}{9}x}^{2}y^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}dy\right\}dx$　（順序変更）

(5) $\displaystyle\iint_D(5y-7)dxdy$　　$(D: x\le x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0)$

東京理科大学　平成　　年　　月　　日　**試験答案**　　　評点

科目名		担当	先生
該当学部を○で囲む	理学部 1 / 工学部 2　部　学科　年　番	氏名	A-2

$\boxed{1}$

(1) $\dfrac{-x^2+37x-114}{(x+6)(x^2-10x+28)} = \dfrac{A}{x+6} + \dfrac{Bx+C}{x^2-10x+28}$

の分母をはらうと

$-x^2+37x-114 = A(x^2-10x+28)+(Bx+C)(x+6)$

・$x=-6$ 代入　$-372 = 124A$　$\therefore A=-3$

・$x=0$ 代入　$-114 = 28A+6C$

$-114 = -84+6C$　$\therefore C=-5$

・$x=1$ 代入　$-78 = 19A+7(B+C)$

$-78 = -57+7(B-5)$　$\therefore B=2$

よって，$A=-3$，$B=2$，$C=-5$

(2) (1) の結果より

$\displaystyle\int \frac{-x^2+37x-114}{(x+6)(x^2-10x+28)}dx$

$\displaystyle= \int \left(-\frac{3}{x+6}+\frac{2x-5}{x^2-10x+28}\right)dx$

$\displaystyle= \int \left\{-\frac{3}{x+6}+\frac{(2x-10)+5}{x^2-10x+28}\right\}dx$

$\displaystyle= \int \left\{-\frac{3}{x+6}+\frac{2x-10}{x^2-10x+28}+\frac{5}{(\sqrt{3})^2+(x-5)^2}\right\}dx$

$\displaystyle= -3\log|x+6| + \log(x^2-10x+28) + \frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-5}{\sqrt{3}}$

$\boxed{2}$

$\sqrt{9x^2-7x+4}+3x = t$　とおくと

$\sqrt{9x^2-7x+4} = t-3x$

両辺2乗して

$9x^2-7x+4 = t^2-6tx+9x^2$

$\therefore x = \dfrac{t^2-4}{6t-7}$

また

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t\cdot(6t-7)-(t^2-4)\cdot 6}{(6t-7)^2} = \dfrac{2(3t^2-7t+12)}{(6t-7)^2}$

さらに

$\sqrt{9x^2-7x+4} = t-3x = t-3\cdot\dfrac{t^2-4}{6t-7} = \dfrac{3t^2-7t+12}{6t-7}$

よって

$\displaystyle\int \frac{2}{x\sqrt{9x^2-7x+4}}dx$

$\displaystyle= \int \frac{2}{\frac{t^2-4}{6t-7}\cdot\frac{3t^2-7t+12}{6t-7}}\cdot\frac{2(3t^2-7t+12)}{(6t-7)^2}dt$

$\displaystyle= \int \frac{4}{t^2-4}dt$

$\displaystyle= \int \frac{4}{(t-2)(t+2)}dt$

$\displaystyle= \int \left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt$

$= \log|t-2| - \log|t+2|$

$\boxed{3}$

$f(x,y) = x^3+xy^2-3x^2-\frac{2}{3}y^2-2xy+\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}y$

(1) $\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2+y^2-6x-2y+\frac{8}{3} = 0 & \cdots ① \\ f_y(x,y) = 2xy-\frac{4}{3}y-2x+\frac{4}{3} = 0 & \cdots ② \end{cases}$

②より　$2x(y-1)-\frac{4}{3}(y-1)=0$

$2(x-\frac{2}{3})(y-1)=0$

$\therefore x=\frac{2}{3}$ または $y=1$

(i) $x=\frac{2}{3}$ のとき，①より

$\frac{4}{3}+y^2-4-2y+\frac{8}{3}=0$

$y(y-2)=0$　$\therefore y=0, 2$

(ii) $y=1$ のとき，①より

$3x^2+1-6x-2+\frac{8}{3}=0$

$9x^2-18x+5=0$

$(3x-1)(3x-5)=0$　$\therefore x=\frac{1}{3}, \frac{5}{3}$

以上(i),(ii)より，停留点は

$(\frac{2}{3},0), (\frac{2}{3},2), (\frac{1}{3},1), (\frac{5}{3},1)$

(2) $f_{xx}(x,y)=6x-6$，$f_{yy}(x,y)=2x-\frac{4}{3}$，$f_{xy}(x,y)=2y-2$

$H(x,y) = (6x-6)(2x-\frac{4}{3})-(2y-2)^2$

・$H(\frac{2}{3},0) = (-2)\cdot 0-(-2)^2 = -4<0$　$\therefore f(\frac{2}{3},0)$：極値でない

・$H(\frac{2}{3},2) = (-2)\cdot 0-2^2 = -4<0$　$\therefore f(\frac{2}{3},2)$：極値でない

・$H(\frac{1}{3},1) = (-4)\cdot(-\frac{2}{3})-0^2 = \frac{8}{3}>0$，$f_{xx}(\frac{1}{3},1) = -4<0$

$\therefore f(\frac{1}{3},1) = \frac{25}{27}$：極大値

・$H(\frac{5}{3},1) = 4\cdot 2-0^2 = 8>0$，$f_{xx}(\frac{5}{3},1) = 4>0$

$\therefore f(\frac{5}{3},1) = -\frac{7}{27}$：極小値

$\boxed{4}$

(1) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{1} 4x^3 \arctan x\,dx$

$\arctan x \quad x^4-1$
$\frac{1}{1+x^2} \quad 4x^3$

$\displaystyle= \left[(x^4-1)\arctan x\right]_{-\sqrt{3}}^{1} - \int_{-\sqrt{3}}^{1}(x^2-1)\,dx$

$\displaystyle= \left\{0\cdot 0 - 8\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} - \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-\sqrt{3}}^{1}$

$\displaystyle= \frac{8}{3}\pi - \left\{\left(\frac{1}{3}-1\right) - \left(-\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)\right\}$

$\displaystyle= \frac{8}{3}\pi + \frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_{-3}^{x^2}(2x+y)\,dy\right\}dx$

$\displaystyle= \int_{-1}^{2}\left[2xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=-3}^{y=x^2}dx$

$\displaystyle= \int_{-1}^{2}\left\{\left(2x^3+\frac{1}{2}x^4\right) - \left(-6x+\frac{9}{2}\right)\right\}dx$

$\displaystyle= \int_{-1}^{2}\left(2x^3+\frac{1}{2}x^4+6x-\frac{9}{2}\right)dx$

$\displaystyle= \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + 3x^2 - \frac{9}{2}x\right]_{-1}^{2}$

$\displaystyle= \left(8+\frac{16}{5}+12-9\right) - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}+3+\frac{9}{2}\right)$

$\displaystyle= \frac{63}{10}$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{3}\left(\int_{x^2}^{x^3}\frac{x}{y}\,dy\right)dx$

$\displaystyle= \int_{1}^{3}\left[x\log y\right]_{y=x^2}^{y=x^3}dx$

$\displaystyle= \int_{1}^{3} x\left(\log x^3 - \log x^2\right)dx$

$\displaystyle= \int_{1}^{3} x\log x\,dx$

$\log x \quad \frac{1}{2}x^2$
$\frac{1}{x} \quad x$

$\displaystyle= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_{1}^{3} - \frac{1}{2}\int_{1}^{3}x\,dx$

$\displaystyle= \frac{1}{2}(9\log 3 - 1\cdot 0) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{3}$

$\displaystyle= \frac{9}{2}\log 3 - \frac{1}{4}(9-1)$

$\displaystyle= \frac{9}{2}\log 3 - 2$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{9}\left\{\int_{\frac{2}{9}x}^{2} y^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}dy\right\}dx \quad \cdots (*)$

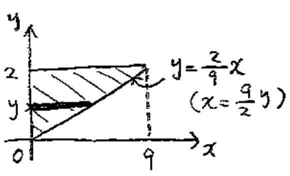
積分領域は

$D: 0 \leqq x \leqq 9,\ \frac{2}{9}x \leqq y \leqq 2$

であるが，これは

$D: 0 \leqq y \leqq 2,\ 0 \leqq x \leqq \frac{9}{2}y$

でもあるから



$\displaystyle(*) = \int_{0}^{2}\left\{\int_{0}^{\frac{9}{2}y} y^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}dx\right\}dy$

$\displaystyle= \int_{0}^{2}\left[xy^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=\frac{9}{2}y}dy$

$\displaystyle= \int_{0}^{2}\frac{9}{2}y^3(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}dy$

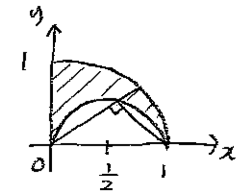
$\displaystyle= \frac{9}{8}\int_{0}^{2}(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}\cdot 4y^3\,dy$

$\displaystyle= \frac{9}{8}\left[-2(y^4+9)^{-\frac{1}{2}}\right]_{0}^{2}$

$\displaystyle= -\frac{9}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)$

$\displaystyle= \frac{3}{10}$

(5) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \begin{pmatrix} r \geqq 0 \\ \theta : 1\text{周分} \end{pmatrix}$ とおくと



$\displaystyle\iint_D (5y-7)\,dxdy \quad (D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

$\displaystyle= \iint_{D'}(5r\sin\theta - 7)\cdot r\,drd\theta \quad \left(D': 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leqq r \leqq 1\right)$

$\displaystyle= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_{\cos\theta}^{1}(5r^2\sin\theta - 7r)\,dr\right\}d\theta$

$\displaystyle= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{5}{3}r^3\sin\theta - \frac{7}{2}r^2\right]_{r=\cos\theta}^{r=1}d\theta$

$\displaystyle= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{5}{3}(1-\cos^3\theta)\sin\theta - \frac{7}{2}(1-\cos^2\theta)\right\}d\theta$

$\displaystyle= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{5}{3}\left\{\sin\theta + \cos^3\theta\cdot(-\sin\theta)\right\} - \frac{7}{2}\sin^2\theta\right]d\theta$

$\displaystyle= \left[\frac{5}{3}\left(-\cos\theta + \frac{1}{4}\cos^4\theta\right)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ 公式

$\displaystyle= \frac{5}{3}\left\{-(0-1) + \frac{1}{4}(0-1)\right\} - \frac{7}{8}\pi$

$\displaystyle= \frac{5}{4} - \frac{7}{8}\pi$