

1. 高次導関数

開区間 I で微分可能な関数 f の導関数 f' が再び I で微分可能なとき, $(f')'$ を f の第 2 次導関数といい, f'' で表す. 一般に, f を n 回微分した関数を f の第 n 次導関数といい, $f^{(n)}$ で表す. また, $f^{(0)} = f$ と定める. そして, $f^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) がすべて I で連続であるとき, f は I で C^n 級であるという.

2. 高次導関数の例

$$(1) (e^x)^{(n)} = e^x \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(2) (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\times (\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x, (\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(3) (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\times (\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x, (\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(4) \{\log(1+x)\}^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(5) \{(1+x)^\alpha\}^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

3. ^{テイラー}Taylor の定理

f が開区間 I で n 回微分可能で, $a, x \in I$ ($x \neq a$) のとき

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n$$

をみたす θ ($0 < \theta < 1$) が存在する.

$\times f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ を剰余項といい, $R_n(x)$ で表す. この場合

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

であり, これを ^{ラグランジュ}Lagrange の剰余項という. また

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{(n-1)!} (x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

を Cauchy の剰余項といい, $p > 0$ として

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{p(n-1)!} (x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

を ^{ロッシュ シュレミルヒ}Roche-Schlömilch の剰余項という. Roche-Schlömilch の剰余項において, $p = 1$ のときが Cauchy の剰余項, $p = n$ のときが Lagrange の剰余項である. 剰余項の形は他にもいろいろある.

4. Taylor 展開

f が開区間 I で無限回微分可能で, $a \in I$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ をみたす $x \in I$ に対しては

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

と級数で表せる.

※これを f の a を中心とする **Taylor 展開** という. 特に, $a = 0$ のときを **Maclaurin 展開** という.

5. 代表的な関数の Maclaurin 展開

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(4) \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(5) (1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

ただし, $\alpha \neq 0, 1, 2, 3, \dots$ とし,

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

は一般二項係数である.

$$(6) \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \cdots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$(7) \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(8) \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

$$(9) \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$(10) \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \cdots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

【例題 1】

代表的な関数の Maclaurin 展開 (p.2) を用いて、次の関数の Maclaurin 展開をカッコ内の項まで求めよ。ただし、係数は既約分数にすること。

$$(1) \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} \quad (4 \text{ 次以下})$$

$$(2) \sqrt{1 + \frac{2x}{3} - x^2} \quad (4 \text{ 次以下})$$

解答

(1) e^x と $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ の Maclaurin 展開の式をかける。そのとき、5 次以上の項は省略すれば

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots\right) \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \cdots\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \cdots \\ &\quad + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^3 - \frac{5}{16}x^4 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{16}x^4 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{24}x^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \frac{41}{384}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

(2) $\sqrt{1+x}$ の Maclaurin 展開の式において x を $\frac{2x}{3} - x^2$ におきかえる。そのとき、5 次以上の項は省略すれば

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{2x}{3} - x^2} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{3} - x^2\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{2x}{3} - x^2\right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{2x}{3} - x^2\right)^3 \\ &\quad - \frac{5}{128} \left(\frac{2x}{3} - x^2\right)^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}x - x^2\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^4\right) \\ &\quad + \frac{1}{16} \left(\frac{8}{27}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \cdots\right) - \frac{5}{128} \left(\frac{16}{81}x^4 + \cdots\right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2 \\ &\quad - \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 \\ &\quad + \frac{1}{54}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \cdots \\ &\quad - \frac{5}{648}x^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{5}{9}x^2 + \frac{5}{27}x^3 - \frac{35}{162}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

□1 代表的な関数の Maclaurin 展開 (p.2) を用いて, 次の関数の Maclaurin 展開をカッコ内の項まで求めよ. ただし, 係数は既約分数にすること. 答えだけでなく途中計算も書くこと.

(1) $\cos x \cdot \arctan x$ (5 次以下)

(2) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+2x}}$ (5 次以下)

(3) $\frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}}$ (5次以下)

(4) $\log\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$ (5次以下)

(5) $\sqrt{1+x-\frac{7x^2}{3}}$ (4次以下)

(6) $\sqrt{1+\frac{x}{2}-\frac{4x^2}{3}}$ (4次以下)

解答

1

(1) $\cos x$ と $\arctan x$ の Maclaurin 展開の式をかける．そのとき，6 次以上の項は省略すれば

$$\begin{aligned}\cos x \cdot \arctan x &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots\right) \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right) \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots \\ &\quad - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^5 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{24}x^5 + \cdots \\ &= x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{49}{120}x^5 + \cdots\end{aligned}$$

(2) $\arcsin x$ の Maclaurin 展開の式と， $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ の Maclaurin 展開の式において x を $2x$ にかえた式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+2x}} &= 1 - \frac{1}{2} \cdot (2x) + \frac{3}{8} \cdot (2x)^2 - \frac{5}{16} \cdot (2x)^3 + \frac{35}{128} \cdot (2x)^4 - \cdots \\ &= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{35}{8}x^4 - \cdots\end{aligned}$$

をかける．そのとき，6 次以上の項は省略すれば

$$\begin{aligned}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+2x}} &= \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots\right) \left(1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{35}{8}x^4 - \cdots\right) \\ &= x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{35}{8}x^5 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{4}x^5 + \cdots \\ &\quad + \frac{3}{40}x^5 + \cdots \\ &= x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{47}{10}x^5 + \cdots\end{aligned}$$

(3) $\log(1+x)$ と $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ の Maclaurin 展開の式をかける．そのとき，6 次以上の項は省略すれば

$$\begin{aligned} & \frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}} \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \right) \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \cdots \right) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^3 - \frac{5}{16}x^4 + \frac{35}{128}x^5 + \cdots \\ &\quad - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^4 + \frac{5}{32}x^5 + \cdots \\ &\quad \quad + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + \cdots \\ &\quad \quad \quad - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + \cdots \\ &\quad \quad \quad \quad + \frac{1}{5}x^5 + \cdots \\ &= x - x^2 + \frac{23}{24}x^3 - \frac{11}{12}x^4 + \frac{563}{640}x^5 + \cdots \end{aligned}$$

(4) $\log(1+x)$ の Maclaurin 展開の式において x を $x + \frac{x^2}{2}$ におきかえる．そのとき，6 次以上の項は省略すれば

$$\begin{aligned} \log\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) &= \left(x+\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^4 \\ &\quad + \frac{1}{5}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^5 + \cdots \\ &= \left(x+\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{2}\left(x^2+x^3+\frac{1}{4}x^4\right) + \frac{1}{3}\left(x^3+\frac{3}{2}x^4+\frac{3}{4}x^5+\cdots\right) \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(x^4+2x^5+\cdots\right) + \frac{1}{5}\left(x^5+\cdots\right) + \cdots \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4 \\ &\quad \quad + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^5 + \cdots \\ &\quad \quad \quad - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^5 + \cdots \\ &\quad \quad \quad \quad + \frac{1}{5}x^5 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{20}x^5 + \cdots \end{aligned}$$

(5) $\sqrt{1+x}$ の Maclaurin 展開の式において x を $x - \frac{7x^2}{3}$ におきかえる. そのとき, 5 次以上の項は省略すれば

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1+x-\frac{7x^2}{3}} &= 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{7x^2}{3} \right) - \frac{1}{8} \left(x - \frac{7x^2}{3} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(x - \frac{7x^2}{3} \right)^3 \\
 &\quad - \frac{5}{128} \left(x - \frac{7x^2}{3} \right)^4 + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{7}{3}x^2 \right) - \frac{1}{8} \left(x^2 - \frac{14}{3}x^3 + \frac{49}{9}x^4 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{16} (x^3 - 7x^4 + \dots) - \frac{5}{128} (x^4 + \dots) + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{7}{6}x^2 \\
 &\quad - \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{12}x^3 - \frac{49}{72}x^4 \\
 &\quad + \frac{1}{16}x^3 - \frac{7}{16}x^4 + \dots \\
 &\quad - \frac{5}{128}x^4 + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{31}{24}x^2 + \frac{31}{48}x^3 - \frac{1333}{1152}x^4 + \dots
 \end{aligned}$$

(6) $\sqrt{1+x}$ の Maclaurin 展開の式において x を $\frac{x}{2} - \frac{4x^2}{3}$ におきかえる. そのとき, 5 次以上の項は省略すれば

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1+\frac{x}{2}-\frac{4x^2}{3}} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{4x^2}{3} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{x}{2} - \frac{4x^2}{3} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{x}{2} - \frac{4x^2}{3} \right)^3 \\
 &\quad - \frac{5}{128} \left(\frac{x}{2} - \frac{4x^2}{3} \right)^4 + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x - \frac{4}{3}x^2 \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{16}{9}x^4 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{8}x^3 - x^4 + \dots \right) - \frac{5}{128} \left(\frac{1}{16}x^4 + \dots \right) + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}x^2 \\
 &\quad - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{9}x^4 \\
 &\quad + \frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \dots \\
 &\quad - \frac{5}{2048}x^4 + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{4}x - \frac{67}{96}x^2 + \frac{67}{384}x^3 - \frac{5293}{18432}x^4 + \dots
 \end{aligned}$$