

1. 原始関数

区間 I で定義された関数 $f(x)$ に対して, I で $F'(x) = f(x)$ をみたす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という. そして, $f(x)$ の原始関数 (全体) を

$$\int f(x)dx$$

で表す.

※ $F_1(x)$ と $F_2(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると, I で

$$\{F_1(x) - F_2(x)\}' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

が成り立つから, 平均値の定理より, $F_1(x) - F_2(x)$ は I で定数である. よって, $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数のひとつとすると, 任意の原始関数は定数 C を用いて

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

で与えられる. この定数 C を積分定数という. 積分計算だけのときは, 積分定数を省略することがある.

2. 代表的な原始関数

$$(1) \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$$

$$(2) \int \frac{1}{x} dx = \log |x|$$

$$(3) \int e^x dx = e^x$$

$$(4) \int \sin x dx = -\cos x$$

$$(5) \int \cos x dx = \sin x$$

$$(6) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$$

$$(7) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x}$$

$$(8) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$(9) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

$$(10) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

※定数 A ($\neq 0$), B に対して

$$\int e^{Ax+B} dx = \frac{1}{A} e^{Ax+B}$$

$$\int \sin(Ax+B) dx = -\frac{1}{A} \cos(Ax+B)$$

などが成り立つ (他も同様).

3. プチ置換

$f(x)$ を区間 I で微分可能な関数とする．このとき， I で

$$\{\log |f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\left\{ \frac{1}{\alpha+1} f(x)^{\alpha+1} \right\}' = f(x)^\alpha \cdot f'(x) \quad (\alpha \neq -1)$$

をみたすから，次が成り立つ．

$$(1) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)|$$

分数のときは，まずは分母の微分を考える．そして，分母の微分が分子にあればプチ置換 (1) で計算．

$$(2) \int f(x)^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{1}{\alpha+1} f(x)^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$$

ルートやべき乗があるときは，まずはルートやべき乗の中の微分を考える．そして，ルートやべき乗の中の微分が外にあればプチ置換 (2) で計算．

※ $\log x$ と $\frac{1}{x}$ があるときは， $\frac{1}{x}$ を $(\log x)'$ とみてプチ置換で計算するとよい．

4. 定積分

連続関数 $f(x)$ の原始関数のひとつを $F(x)$ とするとき，定積分は

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

で計算する（積分してから数値の代入）．

【例題 1】

次を求めよ.

(1) $\int \frac{(x-1)^2(3x-1)}{x^2} dx$

(2) $\int \frac{(3e^{6x} - 2e^{-2x})^2}{e^{7x}} dx$

(3) $\int (2 \sin 5x - 3 \cos 2x + 1)^2 dx$

(4) $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+1} dx$

(5) $\int \frac{5x}{3x^2-1} dx$

(6) $\int \frac{-\cos x}{3 \sin x + 2} dx$

(7) $\int \frac{4 \sin 3x}{6 \cos 3x - 5} dx$

(8) $\int \frac{(\log x)^7}{x} dx$

(9) $\int x \sqrt{x^2+5} dx$

(10) $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}} dx$

(11) $\int \cos^6 x \sin x dx$

(12) $\int (2 \sin^2 x + 5 \sin^4 x) \cos^3 x dx$

(13) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{5+2x}{1+x^2} dx$

(14) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

解答

$$(1) \int \frac{(x-1)^2(3x-1)}{x^2} dx = \int \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{x^2} dx = \int \left(3x - 7 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - 7x + 5 \log |x| + \frac{1}{x}$$

$$\times \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} = -\frac{1}{x} \quad (\text{これは公式としたい})$$

$$(2) \int \frac{(3e^{6x} - 2e^{-2x})^2}{e^{7x}} dx = \int \frac{9e^{12x} - 12e^{4x} + 4e^{-4x}}{e^{7x}} dx = \int (9e^{5x} - 12e^{-3x} + 4e^{-11x}) dx$$

$$= \frac{9}{5}e^{5x} + 4e^{-3x} - \frac{4}{11}e^{-11x}$$

$$(3) \int (2 \sin 5x - 3 \cos 2x + 1)^2 dx$$

$$= \int (4 \sin^2 5x + 9 \cos^2 2x + 1 - 12 \sin 5x \cos 2x - 6 \cos 2x + 4 \sin 5x) dx$$

$$= \int \left\{ 4 \cdot \frac{1 - \cos 10x}{2} + 9 \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} + 1 - 12 \cdot \frac{1}{2} (\sin 7x + \sin 3x) - 6 \cos 2x + 4 \sin 5x \right\} dx$$

$$= \int \left(\frac{15}{2} - 2 \cos 10x + \frac{9}{2} \cos 4x - 6 \sin 7x - 6 \sin 3x - 6 \cos 2x + 4 \sin 5x \right) dx$$

$$= \frac{15}{2}x - \frac{1}{5} \sin 10x + \frac{9}{8} \sin 4x + \frac{6}{7} \cos 7x + 2 \cos 3x - 3 \sin 2x - \frac{4}{5} \cos 5x$$

$$(4) \int \frac{2x+4}{x^2+4x+1} dx = \log |x^2+4x+1|$$

$$(5) \int \frac{5x}{3x^2-1} dx = \frac{5}{6} \int \frac{6x}{3x^2-1} dx = \frac{5}{6} \log |3x^2-1|$$

$$(6) \int \frac{-\cos x}{3\sin x+2} dx = \frac{-1}{3} \int \frac{3\cos x}{3\sin x+2} dx = -\frac{1}{3} \log |3\sin x+2|$$

$$(7) \int \frac{4\sin 3x}{6\cos 3x-5} dx = \frac{4}{-18} \int \frac{-18\sin 3x}{6\cos 3x-5} dx = -\frac{2}{9} \log |6\cos 3x-5|$$

$$(8) \int \frac{(\log x)^7}{x} dx = \int (\log x)^7 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{8} (\log x)^8$$

$$(9) \int x\sqrt{x^2+5} dx = \frac{1}{2} \int (x^2+5)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2+5)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+5)^3}$$

$$(10) \int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}} dx = \frac{1}{-6} \int (1-3x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-6x) dx = -\frac{1}{6} \cdot 2(1-3x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3} \sqrt{1-3x^2}$$

$$(11) \int \cos^6 x \sin x dx = - \int \cos^6 x \cdot (-\sin x) dx = -\frac{1}{7} \cos^7 x$$

$$\begin{aligned} (12) \int (2\sin^2 x + 5\sin^4 x) \cos^3 x dx &= \int (2\sin^2 x + 5\sin^4 x)(1-\sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int (2\sin^2 x + 3\sin^4 x - 5\sin^6 x) \cos x dx = \int (2\sin^2 x \cdot \cos x + 3\sin^4 x \cdot \cos x - 5\sin^6 x \cdot \cos x) dx \\ &= \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{3}{5} \sin^5 x - \frac{5}{7} \sin^7 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (13) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{5+2x}{1+x^2} dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{5}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \left[5 \arctan x + \log(1+x^2) \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 5 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + (\log 4 - \log 2) = \frac{5}{12} \pi + \log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (14) \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) \right\} dx \\ &= \left[\arcsin x - \frac{1}{2} \cdot 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \left(\frac{\pi}{3} - 0 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□ 1 次を求めよ.

$$(1) \int \frac{(3e^{7x} - 5e^{-2x})^2}{e^{9x}} dx$$

$$(2) \int (2 \sin 6x - 3 \cos 2x)^2 dx$$

$$(3) \int \frac{2x-5}{x^2-5x+2} dx$$

$$(4) \int \frac{3x}{4x^2-5} dx$$

$$(5) \int \frac{2 \sin x}{5 \cos x + 4} dx$$

$$(6) \int \frac{14 \cos 5x}{6 \sin 5x - 1} dx$$

$$(7) \int x\sqrt{4x^2-3}dx$$

$$(8) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx$$

$$(9) \int \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2-x+7}}dx$$

$$(10) \int \cos x \sin^4 x dx$$

$$(11) \int \sin^9 3x \cos 3x dx$$

$$(12) \int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx$$

解答

1

$$\begin{aligned}
 (1) \int \frac{(3e^{7x} - 5e^{-2x})^2}{e^{9x}} dx &= \int \frac{9e^{14x} - 30e^{5x} + 25e^{-4x}}{e^{9x}} dx = \int (9e^{5x} - 30e^{-4x} + 25e^{-13x}) dx \\
 &= \frac{9}{5}e^{5x} + \frac{15}{2}e^{-4x} - \frac{25}{13}e^{-13x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int (2\sin 6x - 3\cos 2x)^2 dx &= \int (4\sin^2 6x - 12\sin 6x \cos 2x + 9\cos^2 2x) dx \\
 &= \int \left\{ 4 \cdot \frac{1 - \cos 12x}{2} - 12 \cdot \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x) + 9 \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} \right\} dx \\
 &= \int \left(\frac{13}{2} - 2\cos 12x - 6\sin 8x - 6\sin 4x + \frac{9}{2}\cos 4x \right) dx \\
 &= \frac{13}{2}x - \frac{1}{6}\sin 12x + \frac{3}{4}\cos 8x + \frac{3}{2}\cos 4x + \frac{9}{8}\sin 4x
 \end{aligned}$$

$$(3) \int \frac{2x-5}{x^2-5x+2} dx = \log |x^2-5x+2|$$

$$(4) \int \frac{3x}{4x^2-5} dx = \frac{3}{8} \int \frac{8x}{4x^2-5} dx = \frac{3}{8} \log |4x^2-5|$$

$$(5) \int \frac{2\sin x}{5\cos x+4} dx = \frac{2}{-5} \int \frac{-5\sin x}{5\cos x+4} dx = -\frac{2}{5} \log |5\cos x+4|$$

$$(6) \int \frac{14\cos 5x}{6\sin 5x-1} dx = \frac{14}{30} \int \frac{30\cos 5x}{6\sin 5x-1} dx = \frac{7}{15} \log |6\sin 5x-1|$$

$$(7) \int x\sqrt{4x^2-3} dx = \frac{1}{8} \int (4x^2-3)^{\frac{1}{2}} \cdot 8x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (4x^2-3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{12} \sqrt{(4x^2-3)^3}$$

$$(8) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} dx = \frac{1}{2} \int (x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \cdot 2(x^2+3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+3}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \int \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2-x+7}} dx &= - \int (x^2-x+7)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x-1) dx = -2(x^2-x+7)^{\frac{1}{2}} \\
 &= -2\sqrt{x^2-x+7}
 \end{aligned}$$

$$(10) \int \cos x \sin^4 x dx = \int \sin^4 x \cdot \cos x dx = \frac{1}{5} \sin^5 x$$

$$(11) \int \sin^9 3x \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \sin^9 3x \cdot 3 \cos 3x dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} \sin^{10} 3x = \frac{1}{30} \sin^{10} 3x$$

$$(12) \int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx = \int (\sin x)^{-5} \cdot \cos x dx = \frac{1}{-4} (\sin x)^{-4} = -\frac{1}{4 \sin^4 x}$$