1．有理関数の積分

分母を実数の範囲で因数分解し，その形から部分分数に分解してそれぞれを積分する．

$$\int \frac{1}{a^2+(x+b)^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x+b}{a} \quad (a \neq 0)$$

は公式としてよい（左辺において $x+b=at$ と置換するか，右辺を微分することにより示せる）．

【例題 1】
次を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{-x^2+12x+1}{(x+7)(x^2+x+2)}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{-3x-13}{(x+3)(x^2+4x+5)}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x^2-39x+152}{(x+5)(x^2-12x+39)}dx$

解答

(1) $\dfrac{-x^2+12x+1}{(x+7)(x^2+x+2)} = \dfrac{A}{x+7}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+2}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-x^2+12x+1 = A(x^2+x+2)+(Bx+C)(x+7)$　……①

$x=-7$ を代入　$-132 = 44A$　$\therefore\quad A=-3$

$x=0$ を代入　$1 = 2A+7C$

$1 = -6+7C$　$\therefore\quad C=1$

$x=1$ を代入　$12 = 4A+8(B+C)$

$12 = -12+8(B+1)$　$\therefore\quad B=2$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{-x^2+12x+1}{(x+7)(x^2+x+2)}dx &= \int\left(-\frac{3}{x+7}+\frac{2x+1}{x^2+x+2}\right)dx\\ &= -3\log|x+7|+\log(x^2+x+2)\end{aligned}$$

※① を

$-x^2+12x+1 = (A+B)x^2+(A+7B+C)x+2A+7C$

と変形し，係数比較すると

$$\begin{cases} A+B=-1\\ A+7B+C=12\\ 2A+7C=1\end{cases}$$

この連立方程式を解いて A,B,C を求めてもよい.

(2) $\dfrac{-3x-13}{(x+3)(x^2+4x+5)} = \dfrac{A}{x+3}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4x+5}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-3x-13 = A(x^2+4x+5)+(Bx+C)(x+3)$　……②

$x=-3$ を代入　$-4 = 2A$　$\therefore\quad A=-2$

$x=0$ を代入　$-13 = 5A+3C$

$-13 = -10+3C$　$\therefore\quad C=-1$

$x=1$ を代入　　$-16=10A+4(B+C)$
　　$-16=-20+4(B-1)$　　$\therefore\quad B=2$

よって

$$\begin{aligned}\int\frac{-3x-13}{(x+3)(x^2+4x+5)}dx &= \int\left(-\frac{2}{x+3}+\frac{2x-1}{x^2+4x+5}\right)dx\\ &= \int\left\{-\frac{2}{x+3}+\frac{(2x+4)-5}{x^2+4x+5}\right\}dx\\ &= \int\left\{-\frac{2}{x+3}+\frac{2x+4}{x^2+4x+5}-\frac{5}{1+(x+2)^2}\right\}dx\\ &= -2\log|x+3|+\log(x^2+4x+5)-5\arctan(x+2)\end{aligned}$$

※② を

$-3x-13=(A+B)x^2+(4A+3B+C)x+5A+3C$

と変形し，係数比較すると

$$\begin{cases}A+B=0\\4A+3B+C=-3\\5A+3C=-13\end{cases}$$

この連立方程式を解いて A,B,C を求めてもよい．

(3) $\dfrac{x^2-39x+152}{(x+5)(x^2-12x+39)}=\dfrac{A}{x+5}+\dfrac{Bx+C}{x^2-12x+39}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$x^2-39x+152=A(x^2-12x+39)+(Bx+C)(x+5)$　……③

$x=-5$ を代入　　$372=124A$　　$\therefore\quad A=3$

$x=0$ を代入　　$152=39A+5C$
　　$152=117+5C$　　$\therefore\quad C=7$

$x=1$ を代入　　$114=28A+6(B+C)$
　　$114=84+6(B+7)$　　$\therefore\quad B=-2$

よって

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2-39x+152}{(x+5)(x^2-12x+39)}dx &= \int\left(\frac{3}{x+5}+\frac{-2x+7}{x^2-12x+39}\right)dx\\ &= \int\left\{\frac{3}{x+5}+\frac{-(2x-12)-5}{x^2-12x+39}\right\}dx\\ &= \int\left\{\frac{3}{x+5}-\frac{2x-12}{x^2-12x+39}-\frac{5}{(\sqrt{3})^2+(x-6)^2}\right\}dx\\ &= 3\log|x+5|-\log(x^2-12x+39)-\frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-6}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

※③ を

$x^2 - 39x + 152 = (A + B)x^2 + (-12A + 5B + C)x + 39A + 5C$

と変形し，係数比較すると

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -12A + 5B + C = -39 \\ 39A + 5C = 152 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて A, B, C を求めてもよい.

1 次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{-x^2+15x+4}{(x+2)(x^2-2x+2)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{Bx+C}{x^2-2x+2}$

が常に成り立つとき

$A=$ $\square$, $B=$ $\square$, $C=$ $\square$

である．上の空欄を埋めて，次の積分を求めよ．

$$\int \frac{-x^2+15x+4}{(x+2)(x^2-2x+2)}dx$$

(2) $\dfrac{-7x-24}{(x-2)(x^2+4x+7)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4x+7}$

が常に成り立つとき

$A=$ $\square$, $B=$ $\square$, $C=$ $\square$

である．上の空欄を埋めて，次の積分を求めよ．

$$\int \frac{-7x-24}{(x-2)(x^2+4x+7)}dx$$

(3) $\dfrac{-x^2-15x-53}{(x-1)(x^2+6x+16)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+6x+16}$

が常に成り立つとき

$A =$ $\square$, $B =$ $\square$, $C =$ $\square$

である．上の空欄を埋めて，次の積分を求めよ．

$$\int \frac{-x^2-15x-53}{(x-1)(x^2+6x+16)}dx$$

(4) $\dfrac{11x-9}{(x+3)(x^2-2x+6)} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{Bx+C}{x^2-2x+6}$

が常に成り立つとき

$A =$ $\square$, $B =$ $\square$, $C =$ $\square$

である．上の空欄を埋めて，次の積分を求めよ．

$$\int \frac{11x-9}{(x+3)(x^2-2x+6)}dx$$

(5) $\dfrac{-3x^2+35x-58}{(x+2)(x^2-6x+12)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{Bx+C}{x^2-6x+12}$

が常に成り立つとき

$A = \boxed{}$, $B = \boxed{}$, $C = \boxed{}$

である．上の空欄を埋めて，次の積分を求めよ．

$$\int \frac{-3x^2+35x-58}{(x+2)(x^2-6x+12)}dx$$

(6) $\dfrac{-5x^2-49x-92}{(x-2)(x^2+6x+14)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+6x+14}$

が常に成り立つとき

$A = \boxed{}$, $B = \boxed{}$, $C = \boxed{}$

である．上の空欄を埋めて，次の積分を求めよ．

$$\int \frac{-5x^2-49x-92}{(x-2)(x^2+6x+14)}dx$$

(7) $\dfrac{-2x^2+35x-81}{(x+3)(x^2-8x+18)} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{Bx+C}{x^2-8x+18}$

が常に成り立つとき

$A =$ $\square$, $B =$ $\square$, $C =$ $\square$

である．上の空欄を埋めて，次の積分を求めよ．

$$\int \frac{-2x^2+35x-81}{(x+3)(x^2-8x+18)}dx$$

(8) $\dfrac{-4x^2-11x-39}{(x-3)(x^2+8x+21)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{Bx+C}{x^2+8x+21}$

が常に成り立つとき

$A =$ $\square$, $B =$ $\square$, $C =$ $\square$

である．上の空欄を埋めて，次の積分を求めよ．

$$\int \frac{-4x^2-11x-39}{(x-3)(x^2+8x+21)}dx$$

解答

1

(1) $\dfrac{-x^2+15x+4}{(x+2)(x^2-2x+2)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{Bx+C}{x^2-2x+2}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-x^2+15x+4 = A(x^2-2x+2)+(Bx+C)(x+2)$

$x=-2$ を代入　　$-30 = 10A$　　$\therefore \quad A=-3$

$x=0$ を代入　　$4 = 2A+2C$

$4 = -6+2C$　　$\therefore \quad C=5$

$x=1$ を代入　　$18 = A+3(B+C)$

$18 = -3+3(B+5)$　　$\therefore \quad B=2$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{-x^2+15x+4}{(x+2)(x^2-2x+2)}dx &= \int \left(-\frac{3}{x+2}+\frac{2x+5}{x^2-2x+2}\right)dx \\
&= \int \left\{-\frac{3}{x+2}+\frac{(2x-2)+7}{x^2-2x+2}\right\}dx \\
&= \int \left\{-\frac{3}{x+2}+\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{7}{1+(x-1)^2}\right\}dx \\
&= -3\log|x+2|+\log(x^2-2x+2)+7\arctan(x-1)
\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{-7x-24}{(x-2)(x^2+4x+7)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4x+7}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-7x-24 = A(x^2+4x+7)+(Bx+C)(x-2)$

$x=2$ を代入　　$-38 = 19A$　　$\therefore \quad A=-2$

$x=0$ を代入　　$-24 = 7A-2C$

$-24 = -14-2C$　　$\therefore \quad C=5$

$x=1$ を代入　　$-31 = 12A-(B+C)$

$-31 = -24-(B+5)$　　$\therefore \quad B=2$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{-7x-24}{(x-2)(x^2+4x+7)}dx &= \int \left(-\frac{2}{x-2}+\frac{2x+5}{x^2+4x+7}\right)dx \\
&= \int \left\{-\frac{2}{x-2}+\frac{(2x+4)+1}{x^2+4x+7}\right\}dx \\
&= \int \left\{-\frac{2}{x-2}+\frac{2x+4}{x^2+4x+7}+\frac{1}{(\sqrt{3})^2+(x+2)^2}\right\}dx \\
&= -2\log|x-2|+\log(x^2+4x+7)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{-x^2-15x-53}{(x-1)(x^2+6x+16)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+6x+16}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-x^2-15x-53 = A(x^2+6x+16)+(Bx+C)(x-1)$

$x=1$ を代入　　$-69 = 23A$　　$\therefore \quad A=-3$

$x=0$ を代入　　$-53 = 16A - C$

$-53 = -48 - C$　　$\therefore \quad C=5$

$x=-1$ を代入　　$-39 = 11A - 2(-B+C)$

$-39 = -33 - 2(-B+5)$　　$\therefore \quad B=2$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{-x^2-15x-53}{(x-1)(x^2+6x+16)}dx &= \int\left(-\frac{3}{x-1}+\frac{2x+5}{x^2+6x+16}\right)dx \\ &= \int\left\{-\frac{3}{x-1}+\frac{(2x+6)-1}{x^2+6x+16}\right\}dx \\ &= \int\left\{-\frac{3}{x-1}+\frac{2x+6}{x^2+6x+16}-\frac{1}{(\sqrt{7})^2+(x+3)^2}\right\}dx \\ &= -3\log|x-1|+\log(x^2+6x+16)-\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{x+3}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{11x-9}{(x+3)(x^2-2x+6)} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{Bx+C}{x^2-2x+6}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$11x-9 = A(x^2-2x+6)+(Bx+C)(x+3)$

$x=-3$ を代入　　$-42 = 21A$　　$\therefore \quad A=-2$

$x=0$ を代入　　$-9 = 6A + 3C$

$-9 = -12 + 3C$　　$\therefore \quad C=1$

$x=1$ を代入　　$2 = 5A + 4(B+C)$

$2 = -10 + 4(B+1)$　　$\therefore \quad B=2$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{11x-9}{(x+3)(x^2-2x+6)}dx &= \int\left(-\frac{2}{x+3}+\frac{2x+1}{x^2-2x+6}\right)dx \\ &= \int\left\{-\frac{2}{x+3}+\frac{(2x-2)+3}{x^2-2x+6}\right\}dx \\ &= \int\left\{-\frac{2}{x+3}+\frac{2x-2}{x^2-2x+6}+\frac{3}{(\sqrt{5})^2+(x-1)^2}\right\}dx \\ &= -2\log|x+3|+\log(x^2-2x+6)+\frac{3}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

(5) $\dfrac{-3x^2+35x-58}{(x+2)(x^2-6x+12)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{Bx+C}{x^2-6x+12}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-3x^2+35x-58 = A(x^2-6x+12)+(Bx+C)(x+2)$

$x=-2$ を代入　　$-140 = 28A$　　$\therefore \quad A=-5$

$x=0$ を代入　　$-58 = 12A+2C$

$-58 = -60+2C$　　$\therefore \quad C=1$

$x=1$ を代入　　$-26 = 7A+3(B+C)$

$-26 = -35+3(B+1)$　　$\therefore \quad B=2$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{-3x^2+35x-58}{(x+2)(x^2-6x+12)}dx &= \int\left(-\frac{5}{x+2}+\frac{2x+1}{x^2-6x+12}\right)dx \\ &= \int\left\{-\frac{5}{x+2}+\frac{(2x-6)+7}{x^2-6x+12}\right\}dx \\ &= \int\left\{-\frac{5}{x+2}+\frac{2x-6}{x^2-6x+12}+\frac{7}{(\sqrt{3})^2+(x-3)^2}\right\}dx \\ &= -5\log|x+2|+\log(x^2-6x+12)+\frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-3}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(6) $\dfrac{-5x^2-49x-92}{(x-2)(x^2+6x+14)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+6x+14}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-5x^2-49x-92 = A(x^2+6x+14)+(Bx+C)(x-2)$

$x=2$ を代入　　$-210 = 30A$　　$\therefore \quad A=-7$

$x=0$ を代入　　$-92 = 14A-2C$

$-92 = -98-2C$　　$\therefore \quad C=-3$

$x=1$ を代入　　$-146 = 21A-(B+C)$

$-146 = -147-(B-3)$　　$\therefore \quad B=2$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{-5x^2-49x-92}{(x-2)(x^2+6x+14)}dx &= \int\left(-\frac{7}{x-2}+\frac{2x-3}{x^2+6x+14}\right)dx \\ &= \int\left\{-\frac{7}{x-2}+\frac{(2x+6)-9}{x^2+6x+14}\right\}dx \\ &= \int\left\{-\frac{7}{x-2}+\frac{2x+6}{x^2+6x+14}-\frac{9}{(\sqrt{5})^2+(x+3)^2}\right\}dx \\ &= -7\log|x-2|+\log(x^2+6x+14)-\frac{9}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+3}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

(7) $\dfrac{-2x^2+35x-81}{(x+3)(x^2-8x+18)} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{Bx+C}{x^2-8x+18}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-2x^2+35x-81 = A(x^2-8x+18)+(Bx+C)(x+3)$

$x=-3$ を代入　　$-204 = 51A$　　$\therefore \quad A=-4$

$x=0$ を代入　　$-81 = 18A+3C$

$-81 = -72+3C$　　$\therefore \quad C=-3$

$x=1$ を代入　　$-48 = 11A+4(B+C)$

$-48 = -44+4(B-3)$　　$\therefore \quad B=2$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{-2x^2+35x-81}{(x+3)(x^2-8x+18)}dx &= \int\left(-\frac{4}{x+3}+\frac{2x-3}{x^2-8x+18}\right)dx \\ &= \int\left\{-\frac{4}{x+3}+\frac{(2x-8)+5}{x^2-8x+18}\right\}dx \\ &= \int\left\{-\frac{4}{x+3}+\frac{2x-8}{x^2-8x+18}+\frac{5}{(\sqrt{2})^2+(x-4)^2}\right\}dx \\ &= -4\log|x+3|+\log(x^2-8x+18)+\frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-4}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(8) $\dfrac{-4x^2-11x-39}{(x-3)(x^2+8x+21)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{Bx+C}{x^2+8x+21}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-4x^2-11x-39 = A(x^2+8x+21)+(Bx+C)(x-3)$

$x=3$ を代入　　$-108 = 54A$　　$\therefore \quad A=-2$

$x=0$ を代入　　$-39 = 21A-3C$

$-39 = -42-3C$　　$\therefore \quad C=-1$

$x=1$ を代入　　$-54 = 30A-2(B+C)$

$-54 = -60-2(B-1)$　　$\therefore \quad B=-2$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{-4x^2-11x-39}{(x-3)(x^2+8x+21)}dx &= \int\left(-\frac{2}{x-3}+\frac{-2x-1}{x^2+8x+21}\right)dx \\ &= \int\left\{-\frac{2}{x-3}+\frac{-(2x+8)+7}{x^2+8x+21}\right\}dx \\ &= \int\left\{-\frac{2}{x-3}-\frac{2x+8}{x^2+8x+21}+\frac{7}{(\sqrt{5})^2+(x+4)^2}\right\}dx \\ &= -2\log|x-3|-\log(x^2+8x+21)+\frac{7}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+4}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$