1．2 変数関数の偏微分

$\mathbb{R}^2$：xy 平面，$f(x,y)$：$\mathbb{R}^2$ で定義された関数，$(a,b)\in\mathbb{R}^2$ とする．
$y=b$ とすると，$z=f(x,b)$ は x の 1 変数関数となる．これが $x=a$ で微分可能，すなわち，極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \quad \cdots\cdots(*)$$

が存在するとき，$f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ において x 方向に**偏微分可能**であるといい，$(*)$ を $f_x(a,b)$ で表す．

$$f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

同様に $f_y(a,b)$ も定義される．

$$f_y(a,b)=\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

また，$f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ の各点において偏微分可能なとき

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

を $f(x,y)$ の**偏導関数**という．
さらに，$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ で偏微分可能なとき

$$(f_x)_x(x,y),\quad (f_x)_y(x,y),\quad (f_y)_x(x,y),\quad (f_y)_y(x,y)$$

を $f(x,y)$ の**第 2 次偏導関数**とい，それぞれ

$$f_{xx}(x,y),\quad f_{xy}(x,y),\quad f_{yx}(x,y),\quad f_{yy}(x,y)$$

で表す．
※一般に $f_{xy}(x,y)\neq f_{yx}(x,y)$ であるが，例えば $f(x,y)$ が C^2 級，すなわち，$f(x,y)$ の第 2 次偏導関数がすべて連続であれば $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ が成り立つ．

2．2 変数関数の極値判定法

$f(x,y)$：C^2 級，$(a,b)\in\mathbb{R}^2$

(1) $f(a,b)$：極値　$\Longrightarrow$　$f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$
（このような点 (a,b) を $f(x,y)$ の**停留点**という）

(2) $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ のとき

・$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0$　$\Longrightarrow$　$f(a,b)$：極小値

・$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0$　$\Longrightarrow$　$f(a,b)$：極大値

・$H(a,b)<0$　$\Longrightarrow$　$f(a,b)$：極値でない

ただし $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$ とする（**Hessian**（ヘッシアン））．

☆2 変数関数の極値の求め方
まずは連立方程式 $f_x(x,y)=0,\ f_y(x,y)=0$ を解いて停留点を求める．
次に停留点に対して $H(x,y)$, $f_{xx}(x,y)$ の符号を調べて極値の判定をする．

【例題 1】
$f(x,y)=x^3+2x^2y-4xy^2-y^3$ の第 2 次偏導関数を求めよ．

解答

$f_x(x,y)=(x^3+2x^2y-4xy^2-y^3)_x=3x^2+4xy-4y^2$

$f_y(x,y)=(x^3+2x^2y-4xy^2-y^3)_y=2x^2-8xy-3y^2$

$f_{xx}(x,y)=(3x^2+4xy-4y^2)_x=6x+4y$

$f_{xy}(x,y)=(3x^2+4xy-4y^2)_y=4x-8y$

$f_{yx}(x,y)=(2x^2-8xy-3y^2)_x=4x-8y$

$f_{yy}(x,y)=(2x^2-8xy-3y^2)_y=-8x-6y$

【例題 2】
次の関数の停留点を求め，極値の判定をせよ．

(1) $f(x,y)=x^3+3xy^2-3x^2-3y^2$

(2) $f(x,y)=x^3+xy^2-3x^2-\dfrac{2}{3}y^2-2xy+\dfrac{8}{3}x+\dfrac{4}{3}y$

解答

(1) $f(x,y)=x^3+3xy^2-3x^2-3y^2$

<u>停留点</u>

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+3y^2-6x=0 & \cdots\cdots① \\ f_y(x,y)=6xy-6y=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

② より　$6y(x-1)=0$　　$\therefore$　$y=0$　または　$x=1$
$y=0$ のとき，① より

$3x^2-6x=0$
$3x(x-2)=0$　　$\therefore$　$x=0,2$

$x=1$ のとき，① より

$3y^2-3=0$
$y^2=1$　　$\therefore$　$y=\pm1$

よって，停留点は　$(0,0),\ (2,0),\ (1,\pm1)$

<u>判定</u>

$f_{xx}(x,y)=6x-6,\ f_{yy}(x,y)=6x-6,\ f_{xy}(x,y)=6y$

$H(x,y)=(6x-6)(6x-6)-(6y)^2$

・$H(0,0)=(-6)\cdot(-6)-0^2=36>0,\ f_{xx}(0,0)=-6<0$　　$\therefore$　$f(0,0)=0$：極大値

・$H(2,0)=6\cdot6-0^2=36>0,\ f_{xx}(2,0)=6>0$　　$\therefore$　$f(2,0)=-4$：極小値

・$H(1,\pm1)=0\cdot0-(\pm6)^2=-36<0$　　$\therefore$　$f(1,\pm1)$：極値でない

(2) $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 3x^2 - \frac{2}{3}y^2 - 2xy + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}y$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + y^2 - 6x - 2y + \frac{8}{3} = 0 \quad \cdots\cdots ① \\ f_y(x,y) = 2xy - \frac{4}{3}y - 2x + \frac{4}{3} = 0 \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② より

$$2y\left(x - \frac{2}{3}\right) - 2\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$2\left(x - \frac{2}{3}\right)(y-1) = 0 \qquad \therefore \quad x = \frac{2}{3} \quad \text{または} \quad y = 1$$

$x = \frac{2}{3}$ のとき，① より

$$y^2 - 2y = 0$$
$$y(y-2) = 0 \qquad \therefore \quad y = 0, 2$$

$y = 1$ のとき，① より

$$3x^2 - 6x + \frac{5}{3} = 0$$
$$9x^2 - 18x + 5 = 0$$
$$(3x-1)(3x-5) = 0 \qquad \therefore \quad x = \frac{1}{3}, \frac{5}{3}$$

よって，停留点は　$\left(\frac{2}{3}, 0\right)$，$\left(\frac{2}{3}, 2\right)$，$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$，$\left(\frac{5}{3}, 1\right)$

判定

$f_{xx}(x,y) = 6x - 6,\ f_{yy}(x,y) = 2x - \frac{4}{3},\ f_{xy}(x,y) = 2y - 2$

$H(x,y) = (6x-6)\left(2x - \frac{4}{3}\right) - (2y-2)^2$

・$H\left(\frac{2}{3}, 0\right) = (-2)\cdot 0 - (-2)^2 = -4 < 0 \qquad \therefore \quad f\left(\frac{2}{3}, 0\right)$：極値でない

・$H\left(\frac{2}{3}, 2\right) = (-2)\cdot 0 - 2^2 = -4 < 0 \qquad \therefore \quad f\left(\frac{2}{3}, 2\right)$：極値でない

・$H\left(\frac{1}{3}, 1\right) = (-4)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 0^2 = \frac{8}{3} > 0,\ f_{xx}\left(\frac{1}{3}, 1\right) = -4 < 0$

$$\therefore \quad f\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \frac{25}{27}\text{：極大値}$$

・$H\left(\frac{5}{3}, 1\right) = 4\cdot 2 - 0^2 = 8 > 0,\ f_{xx}\left(\frac{5}{3}, 1\right) = 4 > 0$

$$\therefore \quad f\left(\frac{5}{3}, 1\right) = -\frac{7}{27}\text{：極小値}$$

1 次の関数の停留点を求め，極値の判定をせよ．

(1) $f(x, y) = x^2 - 2y^3 - xy^2 + 2xy$

(2) $f(x,y) = x^3 + xy^2 + 6x^2 + 3y^2$

(3) $f(x, y) = x^3 + xy^2 + 4x^2 + y^2 + 2xy + 5x + 2y$

(4) $f(x,y) = -x^2y - y^3 - x^2 - 2y^2 + 2xy + 2x - y$

(5) $f(x,y) = x^2y + y^3 - \frac{4}{3}x^2 - 3y^2 + 2xy - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}y$

解答

1

(1) $f(x,y)=x^2-2y^3-xy^2+2xy$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2x-y^2+2y=0 & \cdots\cdots① \\ f_y(x,y)=-6y^2-2xy+2x=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

① より　$x=\dfrac{y^2-2y}{2}$

② へ代入すると

$$\begin{aligned} &-6y^2-(y^2-2y)y+y^2-2y=0 \\ &-y^3-3y^2-2y=0 \\ &y^3+3y^2+2y=0 \\ &y(y+1)(y+2)=0 \qquad \therefore\quad y=0,-1,-2 \end{aligned}$$

$y=0$ のとき，① より　$x=0$

$y=-1$ のとき，① より　$x=\dfrac{3}{2}$

$y=-2$ のとき，① より　$x=4$

よって，停留点は　$(0,0)$, $\left(\dfrac{3}{2},-1\right)$, $(4,-2)$

判定

$f_{xx}(x,y)=2,\ f_{yy}(x,y)=-12y-2x,\ f_{xy}(x,y)=-2y+2$

$H(x,y)=2(-12y-2x)-(-2y+2)^2$

・$H(0,0)=2\cdot 0-2^2=-4<0$　　$\therefore$　$f(0,0)$：極値でない

・$H\left(\dfrac{3}{2},-1\right)=2\cdot 9-4^2=2>0,\ f_{xx}\left(\dfrac{3}{2},-1\right)=2>0$

$$\therefore\quad f\left(\frac{3}{2},-1\right)=-\frac{1}{4}$$：極小値

・$H(4,-2)=2\cdot 16-6^2=-4<0$　　$\therefore$　$f(4,-2)$：極値でない

(2) $f(x,y)=x^3+xy^2+6x^2+3y^2$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+y^2+12x=0 & \cdots\cdots① \\ f_y(x,y)=2xy+6y=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

② より　$2y(x+3)=0$　　$\therefore$　$y=0$　または　$x=-3$

$y=0$ のとき，① より

$$\begin{aligned} &3x^2+12x=0 \\ &3x(x+4)=0 \qquad \therefore\quad x=0,-4 \end{aligned}$$

$x=-3$ のとき，① より

$$y^2-9=0$$
$$y^2=9 \qquad \therefore \quad y=\pm 3$$

よって，停留点は　$(0,0),\ (-4,0),\ (-3,\pm 3)$

<u>判定</u>

$f_{xx}(x,y)=6x+12,\ f_{yy}(x,y)=2x+6,\ f_{xy}(x,y)=2y$

$H(x,y)=(6x+12)(2x+6)-(2y)^2$

・$H(0,0)=12\cdot 6-0^2=72>0,\ f_{xx}(0,0)=12>0 \qquad \therefore \quad f(0,0)=0$：極小値

・$H(-4,0)=(-12)\cdot(-2)-0^2=24>0,\ f_{xx}(-4,0)=-12<0$

$\therefore \quad f(-4,0)=32$：極大値

・$H(-3,\pm 3)=(-6)\cdot 0-(\pm 6)^2=-36<0 \qquad \therefore \quad f(-3,\pm 3)$：極値でない

(3) $f(x,y)=x^3+xy^2+4x^2+y^2+2xy+5x+2y$

<u>停留点</u>

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+y^2+8x+2y+5=0 & \cdots\cdots ① \\ f_y(x,y)=2xy+2y+2x+2=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② より

$$2y(x+1)+2(x+1)=0$$
$$2(x+1)(y+1)=0 \qquad \therefore \quad x=-1 \quad \text{または} \quad y=-1$$

$x=-1$ のとき，① より

$$y^2+2y=0$$
$$y(y+2)=0 \qquad \therefore \quad y=0,-2$$

$y=-1$ のとき，① より

$$3x^2+8x+4=0$$
$$(3x+2)(x+2)=0 \qquad \therefore \quad x=-\frac{2}{3},-2$$

よって，停留点は　$(-1,0),\ (-1,-2),\ \left(-\frac{2}{3},-1\right),\ (-2,-1)$

<u>判定</u>

$f_{xx}(x,y)=6x+8,\ f_{yy}(x,y)=2x+2,\ f_{xy}(x,y)=2y+2$

$H(x,y)=(6x+8)(2x+2)-(2y+2)^2$

・$H(-1,0)=2\cdot 0-2^2=-4<0 \qquad \therefore \quad f(-1,0)$：極値でない

・$H(-1,-2)=2\cdot 0-(-2)^2=-4<0 \qquad \therefore \quad f(-1,-2)$：極値でない

・$H\left(-\frac{2}{3},-1\right)=4\cdot\frac{2}{3}-0^2=\frac{8}{3}>0,\ f_{xx}\left(-\frac{2}{3},-1\right)=4>0$

$$\therefore \quad f\left(-\frac{2}{3}, -1\right) = -\frac{59}{27}$$ ：極小値

・$H(-2,-1) = (-4)\cdot(-2) - 0^2 = 8 > 0,\ f_{xx}(-2,-1) = -4 < 0$

$\therefore \quad f(-2,-1) = -1$：極大値

(4) $f(x,y) = -x^2y - y^3 - x^2 - 2y^2 + 2xy + 2x - y$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -2xy - 2x + 2y + 2 = 0 & \cdots\cdots① \\ f_y(x,y) = -x^2 - 3y^2 - 4y + 2x - 1 = 0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

① より

$$-2x(y+1) + 2(y+1) = 0$$
$$-2(y+1)(x-1) = 0 \qquad \therefore \quad y = -1 \quad \text{または} \quad x = 1$$

$y = -1$ のとき，② より

$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0 \qquad \therefore \quad x = 0, 2$$

$x = 1$ のとき，② より

$$-3y^2 - 4y = 0$$
$$-y(3y+4) = 0 \qquad \therefore \quad y = 0, -\frac{4}{3}$$

よって，停留点は　$(0,-1),\ (2,-1),\ (1,0),\ \left(1, -\frac{4}{3}\right)$

判定

$f_{xx}(x,y) = -2y - 2,\ f_{yy}(x,y) = -6y - 4,\ f_{xy}(x,y) = -2x + 2$

$H(x,y) = (-2y-2)(-6y-4) - (-2x+2)^2$

・$H(0,-1) = 0\cdot 2 - 2^2 = -4 < 0 \qquad \therefore \quad f(0,-1)$：極値でない

・$H(2,-1) = 0\cdot 2 - (-2)^2 = -4 < 0 \qquad \therefore \quad f(2,-1)$：極値でない

・$H(1,0) = (-2)\cdot(-4) - 0^2 = 8 > 0,\ f_{xx}(1,0) = -2 < 0$

$\therefore \quad f(1,0) = 1$：極大値

・$H\left(1, -\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot 4 - 0^2 = \frac{8}{3} > 0,\ f_{xx}\left(1, -\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3} > 0$

$$\therefore \quad f\left(1, -\frac{4}{3}\right) = -\frac{5}{27}$$ ：極小値

(5) $f(x,y) = x^2y + y^3 - \frac{4}{3}x^2 - 3y^2 + 2xy - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}y$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy - \frac{8}{3}x + 2y + \frac{8}{3} = 0 & \cdots\cdots① \\ f_y(x,y) = x^2 + 3y^2 - 6y + 2x + \frac{8}{3} = 0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

① より

$$2y(x+1)-\frac{8}{3}(x+1)=0$$

$$2(x+1)\left(y-\frac{4}{3}\right)=0 \qquad \therefore \quad x=-1 \quad \text{または} \quad y=\frac{4}{3}$$

$x=-1$ のとき，② より

$$3y^2-6y+\frac{5}{3}=0$$

$$9y^2-18y+5=0$$

$$(3y-1)(3y-5)=0 \qquad \therefore \quad y=\frac{1}{3},\frac{5}{3}$$

$y=\frac{4}{3}$ のとき，② より

$$x^2+2x=0$$

$$x(x+2)=0 \qquad \therefore \quad x=0,-2$$

よって，停留点は　$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$, $\left(-1,\frac{5}{3}\right)$, $\left(0,\frac{4}{3}\right)$, $\left(-2,\frac{4}{3}\right)$

判定

$f_{xx}(x,y)=2y-\frac{8}{3},\ f_{yy}(x,y)=6y-6,\ f_{xy}(x,y)=2x+2$

$H(x,y)=\left(2y-\frac{8}{3}\right)(6y-6)-(2x+2)^2$

・$H\left(-1,\frac{1}{3}\right)=(-2)\cdot(-4)-0^2=8>0,\ f_{xx}\left(-1,\frac{1}{3}\right)=-2<0$

$$\therefore \quad f\left(-1,\frac{1}{3}\right)=\frac{43}{27}$$ ：極大値

・$H\left(-1,\frac{5}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot 4-0^2=\frac{8}{3}>0,\ f_{xx}\left(-1,\frac{5}{3}\right)=\frac{2}{3}>0$

$$\therefore \quad f\left(-1,\frac{5}{3}\right)=\frac{11}{27}$$ ：極小値

・$H\left(0,\frac{4}{3}\right)=0\cdot 2-2^2=-4<0 \qquad \therefore \quad f\left(0,\frac{4}{3}\right)$：極値でない

・$H\left(-2,\frac{4}{3}\right)=0\cdot 2-(-2)^2=-4<0 \qquad \therefore \quad f\left(-2,\frac{4}{3}\right)$：極値でない