

1. 重積分の累次積分への変更

(1) $g_1(x), g_2(x) : [a, b]$ で連続, $a \leq x \leq b$ で $g_1(x) \leq g_2(x)$

$D : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ (縦線型領域)

$f(x, y) : D$ で連続

$$\Rightarrow \int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

(2) $h_1(y), h_2(y) : [c, d]$ で連続, $c \leq y \leq d$ で $h_1(y) \leq h_2(y)$

$E : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ (横線型領域)

$f(x, y) : E$ で連続

$$\Rightarrow \int \int_E f(x, y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy$$

2. 積分の順序変更

上の (1), (2) において, $D = E$ であれば重積分は等しいから

$$\int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy$$

と積分の順序が変更される.

☆積分の順序変更は次のようにする.

(1) 累次積分から積分領域の式を復元する.

(2) 積分領域を図示する.

(3) 積分領域の「型」を見直して, 式も書き直す.

(4) 書き直した積分領域の式から累次積分に戻す.

【例題 1】

次の累次積分の順序を変更せよ．ただし， $f(x, y)$ は連続とする．

$$(1) \int_0^1 \left\{ \int_{x^3}^x f(x, y) dy \right\} dx$$

積分領域は

$$D : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x$$

であるが，これは

$$D : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq \sqrt[3]{y}$$

でもあるから

$$\int_0^1 \left\{ \int_{x^3}^x f(x, y) dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_y^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \right\} dy$$

$$(2) \int_0^2 \left\{ \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x, y) dy \right\} dx$$

積分領域は

$$D : 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 3 - x$$

であるが，これは

$$D_1 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2y$$

と

$$D_2 : 1 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq 3 - y$$

をあわせたものでもあるから

$$\int_0^2 \left\{ \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x, y) dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_0^{2y} f(x, y) dx \right\} dy + \int_1^3 \left\{ \int_0^{3-y} f(x, y) dx \right\} dy$$

$$(3) \int_1^2 \left\{ \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} f(x, y) dy \right\} dx$$

積分領域は

$$D : 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x^2$$

であるが，これは

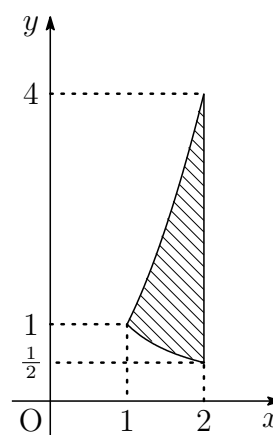
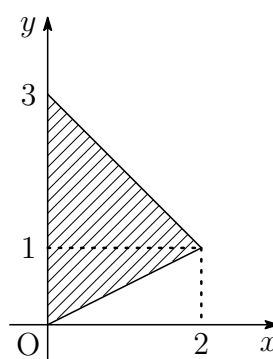
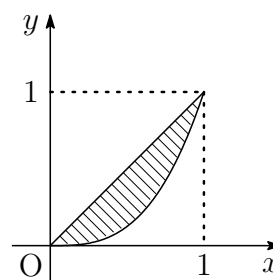
$$D_1 : \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \frac{1}{y} \leq x \leq 2$$

と

$$D_2 : 1 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2$$

をあわせたものでもあるから

$$\int_1^2 \left\{ \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} f(x, y) dy \right\} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{ \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x, y) dx \right\} dy + \int_1^4 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx \right\} dy$$



【例題 2】

次の累次積分の順序を変更し、変更した累次積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^7 \left\{ \int_{\frac{2}{7}x}^2 y^2(y^4 + 9)^{-\frac{3}{2}} dy \right\} dx$$

積分領域は

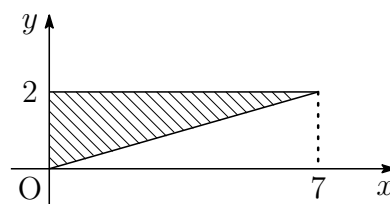
$$D : 0 \leq x \leq 7, \frac{2}{7}x \leq y \leq 2$$

であるが、これは

$$D : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \frac{7}{2}y$$

でもあるから

$$\begin{aligned} \int_0^7 \left\{ \int_{\frac{2}{7}x}^2 y^2(y^4 + 9)^{-\frac{3}{2}} dy \right\} dx &= \int_0^2 \left\{ \int_0^{\frac{7}{2}y} y^2(y^4 + 9)^{-\frac{3}{2}} dx \right\} dy = \int_0^2 \left[xy^2(y^4 + 9)^{-\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=\frac{7}{2}y} dy \\ &= \int_0^2 \frac{7}{2} y^3(y^4 + 9)^{-\frac{3}{2}} dy = \frac{7}{8} \int_0^2 (y^4 + 9)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4y^3 dy = \frac{7}{8} \left[-2(y^4 + 9)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^2 = -\frac{7}{4} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{7}{30} \end{aligned}$$



$$(2) \int_0^1 \left(\int_{2\sqrt{x}}^2 \sqrt{y^3 + 1} dy \right) dx$$

積分領域は

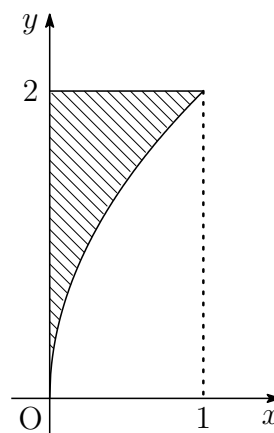
$$D : 0 \leq x \leq 1, 2\sqrt{x} \leq y \leq 2$$

であるが、これは

$$D : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \frac{y^2}{4}$$

でもあるから

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{2\sqrt{x}}^2 \sqrt{y^3 + 1} dy \right) dx &= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{y^2}{4}} \sqrt{y^3 + 1} dx \right) dy \\ &= \int_0^2 \left[x\sqrt{y^3 + 1} \right]_{x=0}^{x=\frac{y^2}{4}} dy = \int_0^2 \frac{y^2}{4} \sqrt{y^3 + 1} dy \\ &= \frac{1}{12} \int_0^2 (y^3 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 3y^2 dy = \frac{1}{12} \left[\frac{2}{3} (y^3 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{1}{18} (27 - 1) = \frac{13}{9} \end{aligned}$$



□ 1 次の累次積分の順序を変更し，変更した累次積分を計算せよ．

$$(1) \int_0^9 \left\{ \int_{\frac{2}{9}x}^2 y^2(y^4 + 9)^{-\frac{3}{2}} dy \right\} dx$$

$$(2) \int_0^5 \left\{ \int_{\frac{3}{5}x}^3 y(y^3 + 9)^{-\frac{3}{2}} dy \right\} dx$$

$$(3) \int_0^6 \left(\int_{\frac{2}{3}x}^4 \frac{y}{\sqrt{y^3 + 36}} dy \right) dx$$

$$(4) \int_0^4 \left\{ \int_{\sqrt{x}}^2 (y^3 + 1)^{\frac{3}{2}} dy \right\} dx$$

解答

1

(1) 積分領域は

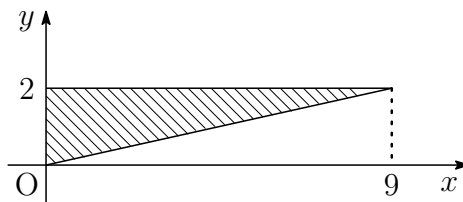
$$D: 0 \leq x \leq 9, \frac{2}{9}x \leq y \leq 2$$

であるが、これは

$$D: 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \frac{9}{2}y$$

でもあるから

$$\begin{aligned} \int_0^9 \left\{ \int_{\frac{2}{9}x}^2 y^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}} dy \right\} dx &= \int_0^2 \left\{ \int_0^{\frac{9}{2}y} y^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}} dx \right\} dy = \int_0^2 \left[xy^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=\frac{9}{2}y} dy \\ &= \int_0^2 \frac{9}{2} y^3(y^4+9)^{-\frac{3}{2}} dy = \frac{9}{8} \int_0^2 (y^4+9)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4y^3 dy = \frac{9}{8} \left[-2(y^4+9)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^2 = -\frac{9}{4} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$



(2) 積分領域は

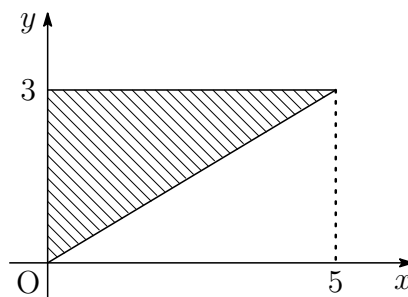
$$D: 0 \leq x \leq 5, \frac{3}{5}x \leq y \leq 3$$

であるが、これは

$$D: 0 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq \frac{5}{3}y$$

でもあるから

$$\begin{aligned} \int_0^5 \left\{ \int_{\frac{3}{5}x}^3 y(y^3+9)^{-\frac{3}{2}} dy \right\} dx &= \int_0^3 \left\{ \int_0^{\frac{5}{3}y} y(y^3+9)^{-\frac{3}{2}} dx \right\} dy = \int_0^3 \left[xy(y^3+9)^{-\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=\frac{5}{3}y} dy \\ &= \int_0^3 \frac{5}{3} y^2(y^3+9)^{-\frac{3}{2}} dy = \frac{5}{9} \int_0^3 (y^3+9)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3y^2 dy = \frac{5}{9} \left[-2(y^3+9)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^3 = -\frac{10}{9} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{5}{27} \end{aligned}$$



(3) 積分領域は

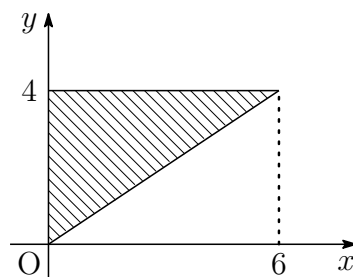
$$D: 0 \leq x \leq 6, \frac{2}{3}x \leq y \leq 4$$

であるが、これは

$$D: 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq \frac{3}{2}y$$

でもあるから

$$\begin{aligned} \int_0^6 \left(\int_{\frac{2}{3}x}^4 \frac{y}{\sqrt{y^3+36}} dy \right) dx &= \int_0^4 \left(\int_0^{\frac{3}{2}y} \frac{y}{\sqrt{y^3+36}} dx \right) dy = \int_0^4 \left[\frac{xy}{\sqrt{y^3+36}} \right]_{x=0}^{x=\frac{3}{2}y} dy \\ &= \int_0^4 \frac{3y^2}{2\sqrt{y^3+36}} dy = \frac{1}{2} \int_0^4 (y^3+36)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3y^2 dy = \frac{1}{2} \left[2(y^3+36)^{\frac{1}{2}} \right]_0^4 = 10 - 6 = 4 \end{aligned}$$



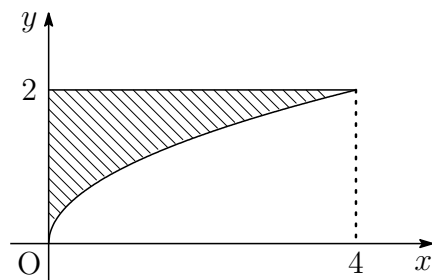
(4) 積分領域は

$$D : 0 \leq x \leq 4, \sqrt{x} \leq y \leq 2$$

であるが、これは

$$D : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y^2$$

でもあるから



$$\begin{aligned} \int_0^4 \left\{ \int_{\sqrt{x}}^2 (y^3 + 1)^{\frac{3}{2}} dy \right\} dx &= \int_0^2 \left\{ \int_0^{y^2} (y^3 + 1)^{\frac{3}{2}} dx \right\} dy = \int_0^2 \left[x(y^3 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=y^2} dy \\ &= \int_0^2 y^2 (y^3 + 1)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{1}{3} \int_0^2 (y^3 + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot 3y^2 dy = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{5} (y^3 + 1)^{\frac{5}{2}} \right]_0^2 = \frac{2}{15} (243 - 1) = \frac{484}{15} \end{aligned}$$