§1.　1 変数関数の微分

★関数の極限

(1) $f(x)$ を a の近くで定義された関数とする．x が a に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に近づくならば，この α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**といい

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \to \alpha \ \ (x \to a)$$

と書く．

※ $x \to a$ のときの $f(x)$ の状態は，$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ ……① の他に

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \cdots\cdots②$$

①, ② のいずれでもない　……③

がある．① の場合は**極限値が存在する**（有限確定）といい，② の場合は極限値は存在しないが**極限が存在する**（確定）といい，③ の場合は**極限が存在しない**という．

$$\lim_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \alpha \\ \infty \\ -\infty \\ \text{存在しない} \end{cases}$$

※ x が $x > a$, $x < a$ を満たしながら a に近づくとき，それぞれ $x \to a+0$, $x \to a-0$ と表し，

$$\lim_{x \to a+0} f(x), \quad \lim_{x \to a-0} f(x)$$

を，それぞれ a における $f(x)$ の**右側極限（値）**，**左側極限（値）**という．次が成り立つ．

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha \ \text{かつ} \ \lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$$

(2) $f(x)$ を十分大きい x に対して定義された関数とする．x が限りなく大きくなるとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に近づくならば，この α を $x \to \infty$ のときの $f(x)$ の**極限値**といい

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \to \alpha \ \ (x \to \infty)$$

と書く．

※ (1) と同様に，$x \to \infty$ のときの $f(x)$ の状態は次の場合がある．

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} \alpha \\ \infty \\ -\infty \\ \text{存在しない} \end{cases}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ も同様に定義され，$x \to -\infty$ のときの $f(x)$ の状態は次の場合がある．

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} \alpha \\ \infty \\ -\infty \\ \text{存在しない} \end{cases}$$

★四則演算に関する極限公式

$\lim_{x\to\square} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to\square} g(x) = \beta$, k を定数とするとき，次の公式が成り立つ．ただし，$\square$ は a, ∞, $-\infty$ のいずれかとする．

(1) $\lim_{x\to\square}\{f(x)\pm g(x)\} = \alpha\pm\beta$ （複号同順）(2) $\lim_{x\to\square} kf(x) = k\alpha$

(3) $\lim_{x\to\square} f(x)g(x) = \alpha\beta$ (4) $\lim_{x\to\square} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ $(\beta\neq 0)$

★はさみうちの原理

$f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$, $\lim_{x\to\square} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to\square} g(x) = \alpha$ ならば $\lim_{x\to\square} h(x) = \alpha$ が成り立つ．ただし，$\square$ は a, ∞, $-\infty$ のいずれかとする．

★e について

数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は収束することが知られている．そこで，この極限値を **Napier**（ネピア）**の数**といい e で表す．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

e の値は

$$e = 2.71828182845904523536\cdots\cdots$$

であり，無理数であることが知られている．また，e を底とする対数を**自然対数**といい，$\log x$ や $\ln x$ で表す．

★代表的な極限値

(1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^\alpha} = 0$ $(\alpha > 0)$ (2) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n} = 0$ (n は自然数)

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ (4) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

(5) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (6) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$

(7) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ (8) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

(9) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (10) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$

証明

(1), (2) は明らか．

(3) $x \geqq 1$ に対して，$n \leqq x < n+1$ を満たす自然数 n がただ 1 つ存在する（$x\to\infty \iff n\to\infty$ に注意）．このとき

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leqq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

特に

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．そして

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}}=\frac{e}{1}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e$$

であるから，$(*)$ で $x\to\infty$ $(n\to\infty)$ とすれば，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ が成り立つ．

(4) $x=-t$ とおけば，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\\ &= e\cdot 1\\ &= e\end{aligned}$$

(5) $x=\dfrac{1}{t}$ とおけば，$x\to+0$ のとき $t\to\infty$ であるから

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

また，$x=\dfrac{1}{t}$ とおけば，$x\to-0$ のとき $t\to-\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ が成り立つ．

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1$

※対数関数の連続性（p.10 参照）を用いている．

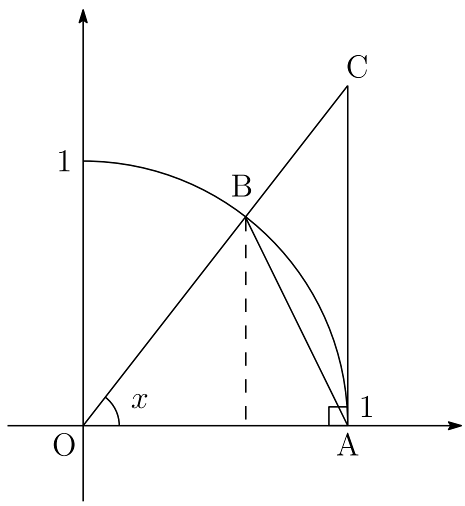
(7) $e^x-1=t$ とおくと，$x\to 0$ のとき $t\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)}=1$$

(8) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，右図より

$$\triangle\,\mathrm{OAB} < \text{扇形 OAB} < \triangle\,\mathrm{OAC}$$

は明らか．



$$\begin{cases} \triangle\,\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x = \dfrac{1}{2}\sin x \\ \text{扇形 OAB} = \dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x = \dfrac{1}{2}x \\ \triangle\,\mathrm{OAC} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x = \dfrac{1}{2}\tan x \end{cases}$$

であるから

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\therefore\quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\cos x = 1$ であるから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つ．
次に，$x = -t$ とおけば，$x\to -0$ のとき $t\to +0$ であるから

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to+0}\frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つ．

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x} = 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1$ ∎

【問題 1.1】
次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-x-6}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x-4}{5x^2+x-6}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2+x+6}{2x^2-7x+3}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x-4}{5x^2+x-6}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^3+x^2-3x+1}{6x^2-x-1}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x+1-\sqrt{3x+7}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+2x}-\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)\right\}$

(11) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)$

(12) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$

(13) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$

(14) $\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+6x+10}+x+3\right)$

(15) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$

(16) $\lim_{x\to0}\dfrac{3\tan 8x}{2x}$

(17) $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan 5x}{\sin 2x}$

(18) $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$

(19) $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos 7x}{x^2}$

(20) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{1-\cos x}$

(21) $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos 7x}{\sin^2 5x}$

(22) $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin x}$

(23) $\lim_{x\to0}\dfrac{x\tan x}{\cos x-1}$

(24) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 3x(1-\cos 5x)}{\tan^3 x}$

(25) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 7x(1-\cos 3x)}{\tan^3 2x}$

(26) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2 x}$

(27) $\lim_{x\to0}\dfrac{x-3\sin x}{2x+\sin x}$

(28) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+\sin 4x}{\sin 3x+\sin 5x}$

(29) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+6x^2}-1}{\sin^2 x}$

(30) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\tan 2x}-\sqrt{1+\tan 2x}}{x}$

(31) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+\sin x}-\sqrt[3]{1-\sin x}}$

(32) $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(33) $\lim_{x\to0}\dfrac{\cos 11x-\cos 6x}{x^2}$

(34) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos 5x}-\sqrt{\cos 3x}}{x^2}$

(35) $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2(-\sin x+3\sin 3x)}{\tan x(\cos x-\cos 3x)}$

(36) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(3\sin x)}{x}$

(37) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(1-\cos x)}{x^2}$

(38) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\sin^2 x}$

(39) $\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}-\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)$

(40) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

(41) $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$

(42) $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{(x+1)^2}-e^{x^2+1}}{x}$

(43) $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\log(1+x)}$

(44) $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{x\sin 3x}-1}{x\log(1+x)}$

解答

(1) $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1}\dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{4}{3}$

(2) $\lim_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to-1}\dfrac{x+2}{x-3}=-\dfrac{1}{4}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(3x+4)}=\lim_{x\to2}\frac{2x+3}{3x+4}=\frac{7}{10}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{2x^2-x-6}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(2x+3)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{2x+3}=\frac{12}{7}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+3x-4}{5x^2+x-6}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+4)}{(x-1)(5x+6)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+4}{5x+6}=\frac{6}{11}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^3-4x^2+x+6}{2x^2-7x+3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2-x-2)}{(x-3)(2x-1)}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-2}{2x-1}=\frac{4}{5}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+3x-4}{5x^2+x-6}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+4)}{(x-1)(5x+6)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+4}{5x+6}=\frac{6}{11}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^3+x^2-3x+1}{6x^2-x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(x^2+x-1)}{(2x-1)(3x+1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x^2+x-1}{3x+1}=-\frac{1}{10}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x+1-\sqrt{3x+7}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}=\lim_{x\to3}\frac{\{(x+1)^2-(3x+7)\}(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}{\{(2x+3)-(x+6)\}(x+1+\sqrt{3x+7})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{(x^2-x-6))(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}{(x-3)(x+1+\sqrt{3x+7})}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+2)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}{(x-3)(x+1+\sqrt{3x+7})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{(x+2)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}{x+1+\sqrt{3x+7}}=\frac{15}{4}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+2x}-\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)\right\}=\lim_{x\to0}\frac{(1+2x)-\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^3\left\{\sqrt{1+2x}+\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)\right\}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(1+2x)-\left(1+x^2+\frac{x^4}{4}+2x-x^3-x^2\right)}{x^3\left(\sqrt{1+2x}+1+x-\frac{x^2}{2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^3-\frac{x^4}{4}}{x^3\left(\sqrt{1+2x}+1+x-\frac{x^2}{2}\right)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x}{4}}{\sqrt{1+2x}+1+x-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-3x+2)-x^2}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=\frac{-3}{1+1}=-\frac{3}{2}$

(12) $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}\right)=-1$

(13) $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+1}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t+1)-(t^2+1)}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

(14) $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+6x+10}+x+3\right)=\lim_{t\to\infty}\left\{-t\left(\sqrt{t^2-6t+10}-t+3\right)\right\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t\{(t^2-6t+10)-(t-3)^2\}}{\sqrt{t^2-6t+10}+(t-3)}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t\{(t^2-6t+10)-(t^2-6t+9)\}}{\sqrt{t^2-6t+10}+t-3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-6t+10}+t-3}=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{6}{t}+\frac{10}{t^2}}+1-\frac{3}{t}}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}\right)=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(16) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3\tan 8x}{2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan 8x}{8x}\cdot 12\right)=1\cdot12=12$

(17) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5}{2}\right)=1\cdot1\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$

(18) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{(2x)^2}{1-\cos 2x}\cdot\frac{1}{4}\right\}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

※ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\right\}=\frac{1}{2}\cdot1^2=\frac{1}{2}$

(19) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 7x}{x^2}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-\cos 7x}{(7x)^2}\cdot49\right\}=\frac{1}{2}\cdot49=\frac{49}{2}$

(20) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot9\right\}=1^2\cdot2\cdot9=18$

(21) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 7x}{\sin^2 5x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-\cos 7x}{(7x)^2}\cdot\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right)^2\cdot\frac{49}{25}\right\}=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{49}{25}=\frac{49}{50}$

(22) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-\cos 6x}{(6x)^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot36\right\}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot36=18$

(23) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\tan x}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\right)=-1\cdot2=-2$

(24) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x(1-\cos 5x)}{\tan^3 x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1-\cos 5x}{(5x)^2}\cdot\left(\frac{x}{\tan x}\right)^3\cdot75\right\}$

$\displaystyle=1\cdot\frac{1}{2}\cdot1^3\cdot75=\frac{75}{2}$

(25) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x(1-\cos 3x)}{\tan^3 2x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\cdot\left(\frac{2x}{\tan 2x}\right)^3\cdot\frac{7\cdot9}{8}\right\}$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^3 \cdot \frac{7 \cdot 9}{8} = \frac{63}{16}$$

(26) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x\sin x) - \cos^2 x}{\sin^2 x(\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x + x\sin x}{\sin^2 x(\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \left\{ \left(1 + \frac{x}{\sin x}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x} \right\}$$

$$= (1 + 1) \cdot \frac{1}{1 + 1} = 1$$

(27) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - 3\sin x}{2x + \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 3 \cdot \dfrac{\sin x}{x}}{2 + \dfrac{\sin x}{x}} = \frac{1 - 3 \cdot 1}{2 + 1} = -\frac{2}{3}$

(28) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x + \sin 4x}{\sin 3x + \sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\sin 2x}{x} + \dfrac{\sin 4x}{x}}{\dfrac{\sin 3x}{x} + \dfrac{\sin 5x}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 + \dfrac{\sin 4x}{4x} \cdot 4}{\dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 + \dfrac{\sin 5x}{5x} \cdot 5}$

$$= \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 4}{1 \cdot 3 + 1 \cdot 5} = \frac{3}{4}$$

※和積の公式を用いて計算してもよい.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x + \sin 4x}{\sin 3x + \sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin 3x \cos x}{2\sin 4x \cos x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \frac{3}{4} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

(29) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 6x^2} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + 6x^2) - 1}{\sin^2 x(\sqrt{1 + 6x^2} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{6x^2}{\sin^2 x(\sqrt{1 + 6x^2} + 1)}$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{ \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \frac{6}{\sqrt{1 + 6x^2} + 1} \right\} = 1^2 \cdot \frac{6}{1 + 1} = 3$$

(30) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \tan 2x} - \sqrt{1 + \tan 2x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \tan 2x) - (1 + \tan 2x)}{x(\sqrt{1 - \tan 2x} + \sqrt{1 + \tan 2x})}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\tan 2x}{x(\sqrt{1 - \tan 2x} + \sqrt{1 + \tan 2x})} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{-4}{\sqrt{1 - \tan 2x} + \sqrt{1 + \tan 2x}} \right)$$

$$= 1 \cdot \frac{-4}{1 + 1} = -2$$

(31) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt[3]{1 + \sin x} - \sqrt[3]{1 - \sin x}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\{(1 + x) - (1 - x)\}\{(\sqrt[3]{1 + \sin x})^2 + \sqrt[3]{1 + \sin x}\sqrt[3]{1 - \sin x} + (\sqrt[3]{1 - \sin x})^2\}}{\{(1 + \sin x) - (1 - \sin x)\}(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x\{(\sqrt[3]{1 + \sin x})^2 + \sqrt[3]{1 + \sin x}\sqrt[3]{1 - \sin x} + (\sqrt[3]{1 - \sin x})^2\}}{2\sin x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{(\sqrt[3]{1 + \sin x})^2 + \sqrt[3]{1 + \sin x}\sqrt[3]{1 - \sin x} + (\sqrt[3]{1 - \sin x})^2}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} \right\}$$

$$= 1 \cdot \frac{1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

※ $\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}$ を用いて 3 乗根の有理化をした．

(32) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(33) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos 11x-\cos 6x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 6x)-(1-\cos 11x)}{x^2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-\cos 6x}{(6x)^2}\cdot 36-\frac{1-\cos 11x}{(11x)^2}\cdot 121\right\}=\frac{1}{2}\cdot 36-\frac{1}{2}\cdot 121=-\frac{85}{2}$

※和積の公式を用いて計算してもよい．

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos 11x-\cos 6x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{17x}{2}\sin\frac{5x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(-2\cdot\frac{\sin\frac{17x}{2}}{\frac{17x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\cdot\frac{17}{2}\cdot\frac{5}{2}\right)$$

$\displaystyle=-2\cdot1\cdot1\cdot\frac{17}{2}\cdot\frac{5}{2}=-\frac{85}{2}$

(34) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos 5x}-\sqrt{\cos 3x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2(\sqrt{\cos 5x}+\sqrt{\cos 3x})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 3x)-(1-\cos 5x)}{x^2(\sqrt{\cos 5x}+\sqrt{\cos 3x})}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\cdot 9-\frac{1-\cos 5x}{(5x)^2}\cdot 25}{\sqrt{\cos 5x}+\sqrt{\cos 3x}}$$

$\displaystyle=\frac{\frac{1}{2}\cdot 9-\frac{1}{2}\cdot 25}{1+1}=-4$

※ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos 5x}-\sqrt{\cos 3x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2(\sqrt{\cos 5x}+\sqrt{\cos 3x})}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin 4x\sin x}{x^2(\sqrt{\cos 5x}+\sqrt{\cos 3x})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{-8}{\sqrt{\cos 5x}+\sqrt{\cos 3x}}\right)=1\cdot1\cdot\frac{-8}{1+1}=-4$

(35) $$\lim_{x\to0}\frac{x^2(-\sin x+3\sin 3x)}{\tan x(\cos x-\cos 3x)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\sin x}{x}+3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\frac{\tan x}{x}\cdot\left\{\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\cdot 9-\frac{1-\cos x}{x^2}\right\}}$$

$\displaystyle=\frac{-1+3\cdot1\cdot3}{1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 9-\frac{1}{2}\right)}=2$

※分母・分子に 3 倍角の公式を使ったり，分母の $\cos x-\cos 3x$ に和積の公式を使ってもよい．

(36) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(3\sin x)}{x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(3\sin x)}{3\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot 3\right\}=1\cdot1\cdot3=3$

(37) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right\}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(38) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x-2\sin x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{2(\cos x-1)}{x\sin x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot(-2)\right\}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot(-2)=-1$

(39) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\sin 3x}{3x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{3\sin 2x-2\sin 3x}{6x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6\sin x\cos x-2(3\sin x-4\sin^3 x)}{6x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x(3\cos x-3+4\sin^2 x)}{6x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\{4\sin^2 x-3(1-\cos x)\}}{3x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)\{4(1+\cos x)-3\}}{3x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+4\cos x}{3}\right)=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{6}$$

(40) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2=e^2$

(41) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)e^{-x}}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2e^{-x}\right)=1\cdot2=2$

(42) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{(x+1)^2}-e^{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)e^{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2e^{x^2+1}\right)=1\cdot2e=2e$

(43) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\log(1+x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\cdot\frac{x}{\log(1+x)}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot2\right\}=1\cdot1\cdot1\cdot2=2$

(44) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x\sin 3x}-1}{x\log(1+x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{x\sin 3x}-1}{x\sin 3x}\cdot\frac{x}{\log(1+x)}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot3\right\}=1\cdot1\cdot1\cdot3=3$

★区間

実数 a,b $(a<b)$ に対して，$a<x<b$ をみたす実数 x 全体を (a,b) で表し，$a\leqq x\leqq b$ をみたす実数 x 全体を $[a,b]$ で表す．(a,b), $[a,b]$ はそれぞれ**開区間**，**閉区間**といわれる．この他にも，$(a,b]$, $[a,b)$, (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $(-\infty,\infty)$ などが区間である（最後の区間は実数全体のこと）．今後は，区間で定義された関数を考える．

★関数の連続性

$f(x)$ を区間 I で定義された関数とする．$a\in I$ として，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ ……① が成り立つとき，$f(x)$ は $x=a$ で**連続**であるという．a が I の端点でないときは

$$① \iff \lim_{x\to a+0}f(x)=f(a) \quad \text{かつ} \quad \lim_{x\to a-0}f(x)=f(a)$$

である．一方，a が I の端点のときは，① は片側極限で考える．また，$f(x)$ が I の各点で連続であるとき，$f(x)$ は I で**連続**であるという．

★導関数

$f(x)$ を開区間 I で微分可能な関数，すなわち，各要素 $x\in I$ に対し，極限値

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が存在するとき，$f'(x)$ を $f(x)$ の**導関数**という．また，$f(x)$ から $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を x について**微分する**という．一般に，微分可能ならば連続である．

★四則演算に関する微分法則

$f(x), g(x)$ を開区間 I で微分可能な関数とするとき，次が成り立つ．

(1) $\{kf(x)\}' = kf'(x)$　(k は定数)

(2) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$　（複号同順）

(3) 積の微分法則

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(4) 商の微分法則

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{特に} \quad \left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

ただし，$g(x) \neq 0$ とする．

証明

(1) $\{kf(x)\}' = \lim_{h \to 0} \dfrac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = k \times \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = kf'(x)$

(2)
$$\begin{aligned}
\{f(x) \pm g(x)\}' &= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h) \pm g(x+h)\} - \{f(x) \pm g(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\} \\
&= f'(x) \pm g'(x) \quad \text{（複号同順）}
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)\} + \{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times g(x+h) + f(x) \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

※「微分可能ならば連続」を使った．

(4)
$$\begin{aligned}
\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)\} - \{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)\}}{hg(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \times g(x) - f(x) \times \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

※「微分可能ならば連続」を使った．　■

★合成関数の微分法則

$f(x), g(x)$ をそれぞれ開区間 I, J で微分可能な関数とし，$f(I) \subset J$ をみたすとする．このとき

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

が成り立つ．

証明

$y = f(x+h),\ b = f(x)$ とおくと，$f(x)$ の連続性より $h \to 0$ のとき $y \to b$ なので

$$\begin{aligned}
\{g(f(x))\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} \\
&= \lim_{y\to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \times \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= g'(b) \times f'(x) \\
&= g'(f(x)) \cdot f'(x) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

★代表的な導関数

(1) $(c)' = 0 \quad (c$ は定数)

(2) $(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$

(3) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \neq 0)$

(4) $(e^x)' = e^x$

(5) $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$

(6) $(\sin x)' = \cos x$

(7) $(\cos x)' = -\sin x$

(8) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

※ (3) で $\alpha = \dfrac{1}{2}$ とした $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ は公式としたい．

証明

(1) $(c)' = \lim_{h\to 0} \dfrac{c-c}{h} = 0$

(2) $n \in \mathbb{N}$ のとき，二項定理 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k$ を用いると

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{({}_n\mathrm{C}_0 x^n + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} xh^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n h^n) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} \right\} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

また，$n = -m\ (m \in \mathbb{N})$ のとき

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

(4) $(e^x)' = \lim_{h \to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \times \lim_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = e^x$

(3) $x > 0$ のとき $x^\alpha = e^{\log x^\alpha} = e^{\alpha \log x}$ であるから

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \log x}\right)' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

※$\alpha \in \mathbb{Z}$ のときは $x > 0$ でなくてもよい.

(5) h が十分 0 に近いとき, $\dfrac{x+h}{x} > 0$ なので

$$(\log|x|)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log|x+h| - \log|x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log \dfrac{x+h}{x}}{h} = \frac{1}{x} \times \lim_{h \to 0} \frac{\log\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{x}{h}} = \frac{1}{x}$$

$$
\begin{aligned}
(6) \quad (\sin x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\{\sin x \cos h + \cos x \sin h\} - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
&= -\sin x \times \lim_{h \to 0} \left(\frac{1 - \cos h}{h^2} \cdot h \right) + \cos x \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(7) \quad (\cos x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\{\cos x \cos h - \sin x \sin h\} - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\
&= -\cos x \times \lim_{h \to 0} \left(\frac{1 - \cos h}{h^2} \cdot h \right) - \sin x \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(8) \quad (\tan x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h} - \tan x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\tan h(1 + \tan^2 x)}{h(1 - \tan x \tan h)} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \times \lim_{h \to 0} \left(\frac{\tan h}{h} \cdot \frac{1}{1 - \tan x \tan h} \right) \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

★1 次関数との合成

定数 $A\ (\neq 0)$，B に対して，次が成り立つ．

(3) $\bigl\{(Ax+B)^\alpha\bigr\}' = A\alpha(Ax+B)^{\alpha-1} \quad (\alpha \neq 0)$

(4) $\bigl(e^{Ax+B}\bigr)' = Ae^{Ax+B}$

(5) $\bigl(\log|Ax+B|\bigr)' = \dfrac{A}{Ax+B}$

(6) $\bigl\{\sin(Ax+B)\bigr\}' = A\cos(Ax+B)$

(7) $\bigl\{\cos(Ax+B)\bigr\}' = -A\sin(Ax+B)$

(8) $\bigl\{\tan(Ax+B)\bigr\}' = \dfrac{A}{\cos^2(Ax+B)}$

★公式としたい合成微分

$f(x)$ を開区間 I で微分可能な関数とする．

(1) $f(x) > 0\ (x \in I)$ のとき

$$\{f(x)^\alpha\}' = \alpha f(x)^{\alpha-1} \cdot f'(x) \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\Bigl\{\sqrt{f(x)}\Bigr\}' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

※$\alpha \in \mathbb{Z}$ のときは $f(x) > 0\ (x \in I)$ でなくてもよい．

(2) $f(x) \neq 0\ (x \in I)$ のとき

$$\{\log|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{（対数微分）}$$

【問題 1.2】

次の関数を微分せよ．

(1) $\dfrac{3x+4}{2x-3}$

(2) $\dfrac{x^2-3}{x-2}$

(3) $\dfrac{2x^2-x+3}{x-4}$

(4) $\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$

(5) $\dfrac{3x-4}{x^2+1}$

(6) $\dfrac{2x+3}{x^2-2x-3}$

(7) $\dfrac{-3x+5}{x^2-4x+7}$

(8) $\dfrac{2x+1}{x^2-2x+5}$

(9) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2}$

(10) $\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+2}$

(11) $\dfrac{2x^2}{2x^2+3x-2}$

(12) $\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-2x+3}$

(13) $\dfrac{-x^2+3x-1}{x^2+5x+7}$

(14) $\dfrac{-2x^2+5x+1}{x^2-x+3}$

(15) $\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-2x+3}$

(16) $\dfrac{-5x^2+8x+1}{x^2-3x+4}$

(17) $\dfrac{-4x^2+7x+1}{x^2+x+1}$

(18) $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+3x+5}$

(19) $\dfrac{x^2-4x+7}{2x^2-x+3}$

(20) $\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+2}$

(21) $\dfrac{x^3+4x^2+5x+1}{x+1}$

(22) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3+x}$

(23) $\sin 5x \sin 4x$

(24) $\sin 2x \cos 3x$

(25) $\sin 3x \cos 5x$

(26) $\cos 7x \cos 4x$

(27) $\dfrac{1}{\tan x}$

(28) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

(29) $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

(30) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

(31) $\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$

(32) $\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}$

(33) $\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}$

(34) $\dfrac{\cos x}{3+\sin x}$

(35) $\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$

(36) $\dfrac{\cos x}{1-4\sin x}$

(37) $\dfrac{\sin(2x+1)}{3x-5}$

(38) $e^{3x}-6e^{2x}+9e^x+2$

(39) $(x-1)e^{x-2}$

(40) x^2e^{-x}

(41) $(x^2-3)e^x$

(42) $(x^2+4x+4)e^{-x}$

(43) $(x^2-2x-11)e^{\frac{x}{2}}$

(44) $(x^2+3x)e^{-\frac{x}{2}}$

(45) $(2x^3+3x^2+4x+4)e^{-x}$

(46) $e^{-x}\sin 2x$

(47) $e^{3x}\cos 5x$

(48) $x^2\log x - x$

(49) $x^3\log 2x$

(50) $\log x(2\log x-1)$

(51) $(\log x-1)(2\log x+x^3-4x)$

(52) $\dfrac{e^x-2}{3e^x+4}$

(53) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(54) $\dfrac{x}{\log x-1}$

(55) $\dfrac{e^{\frac{x}{4}}}{x^2-3x+18}$

(56) $\dfrac{xe^x}{e^x+3}$

(57) $\dfrac{xe^{5x}}{e^x-2}$

(58) $\dfrac{x\cos 4x}{\log x}$

(59) $\dfrac{x\log x}{\log x+1}$

(60) $\dfrac{x\log x}{x+\log x}$

(61) $\dfrac{x\log x}{x-\log x}$

(62) $\dfrac{e^x}{x\log x}$

(63) $\dfrac{e^{2x}\log x}{\log x-3}$

(64) $\left(\dfrac{x+1}{2x^2+1}\right)^4$

(65) $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3$

(66) $\sqrt{x^2-2x+2}$

(67) $\sqrt{1+\sin^2 x}$

(68) $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

(69) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

(70) $\sqrt{\dfrac{5x-2}{7x+13}}$

(71) $\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{x+1}}$

(72) $x\sqrt{9-x^2}$

(73) $(x+1)\sqrt{1-x^2}$

(74) $(x+2)\sqrt{x^2-1}$

(75) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

(76) $\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$

(77) $\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-x^2}}$

(78) $\dfrac{1+2x}{\sqrt{3-5x-x^2}}$

(79) $\dfrac{(\log x)^2}{x}$

(80) $\dfrac{\sin^5 x}{x^3}$

(81) $\log(e^x+\sin x)$

(82) $\log(e^{2x}+x)$

(83) $\log(\tan x)$

(84) $\log(\log x)^3$

(85) $\log(x+\sqrt{x^2+7})$

(86) $\log(-x+\sqrt{x^2+4})$

(87) $\log|x-\sqrt{x^2+9}|$

(88) $\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

(89) $\log\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$

(90) $\log\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$

(91) $x^{\sqrt{x}}\quad(x>0)$

(92) $x^{\tan x}\quad(x>0)$

(93) $(\log x)^{\sin x}\quad(x>1)$

(94) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\quad(x<-1,\ 0<x)$

解答

(1) $\left(\dfrac{3x+4}{2x-3}\right)'=\dfrac{3\cdot(2x-3)-(3x+4)\cdot 2}{(2x-3)^2}=-\dfrac{17}{(2x-3)^2}$

(2) $\left(\dfrac{x^2-3}{x-2}\right)'=\dfrac{2x\cdot(x-2)-(x^2-3)\cdot 1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

(3) $\left(\dfrac{2x^2-x+3}{x-4}\right)'=\dfrac{(4x-1)\cdot(x-4)-(2x^2-x+3)\cdot 1}{(x-4)^2}=\dfrac{2x^2-16x+1}{(x-4)^2}$

(4) $\left(\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}\right)'=\dfrac{(4x-3)\cdot(x-1)-(2x^2-3x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2}$

(5) $\left(\dfrac{3x-4}{x^2+1}\right)'=\dfrac{3\cdot(x^2+1)-(3x-4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-3x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}$

(6) $\left(\dfrac{2x+3}{x^2-2x-3}\right)'=\dfrac{2\cdot(x^2-2x-3)-(2x+3)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2}=\dfrac{-2x^2-6x}{(x^2-2x-3)^2}$

(7) $\left(\dfrac{-3x+5}{x^2-4x+7}\right)'=\dfrac{-3\cdot(x^2-4x+7)-(-3x+5)\cdot(2x-4)}{(x^2-4x+7)^2}=\dfrac{3x^2-10x-1}{(x^2-4x+7)^2}$

(8) $\left(\dfrac{2x+1}{x^2-2x+5}\right)'=\dfrac{2\cdot(x^2-2x+5)-(2x+1)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2}=\dfrac{-2x^2-2x+12}{(x^2-2x+5)^2}$

(9) $\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2}\right)'=\dfrac{(2x-1)\cdot(x^2+2)-(x^2-x+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{x^2+2x-2}{(x^2+2)^2}$

(10) $\left(\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+2}\right)'=\dfrac{(6x-2)\cdot(x^2+2)-(3x^2-2x+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{2x^2+10x-4}{(x^2+2)^2}$

(11) $\left(\dfrac{2x^2}{2x^2+3x-2}\right)'=\dfrac{4x\cdot(2x^2+3x-2)-2x^2\cdot(4x+3)}{(2x^2+3x-2)^2}=\dfrac{6x^2-8x}{(2x^2+3x-2)^2}$

(12) $\left(\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-2x+3}\right)'=\dfrac{(6x-4)\cdot(x^2-2x+3)-(3x^2-4x+1)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2}$

$=\dfrac{-2x^2+16x-10}{(x^2-2x+3)^2}$

(13) $\left(\dfrac{-x^2+3x-1}{x^2+5x+7}\right)'=\dfrac{(-2x+3)\cdot(x^2+5x+7)-(-x^2+3x-1)\cdot(2x+5)}{(x^2+5x+7)^2}$

$=\dfrac{-8x^2-12x+26}{(x^2+5x+7)^2}$

(14) $\left(\dfrac{-2x^2+5x+1}{x^2-x+3}\right)'=\dfrac{(-4x+5)\cdot(x^2-x+3)-(-2x^2+5x+1)\cdot(2x-1)}{(x^2-x+3)^2}$

$=\dfrac{-3x^2-14x+16}{(x^2-x+3)^2}$

(15) $\left(\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-2x+3}\right)'=\dfrac{(4x+1)\cdot(x^2-2x+3)-(2x^2+x-1)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2}$

$=\dfrac{-5x^2+14x+1}{(x^2-2x+3)^2}$

(16) $\left(\dfrac{-5x^2+8x+1}{x^2-3x+4}\right)'=\dfrac{(-10x+8)\cdot(x^2-3x+4)-(-5x^2+8x+1)\cdot(2x-3)}{(x^2-3x+4)^2}$

$=\dfrac{7x^2-42x+35}{(x^2-3x+4)^2}$

(17) $\left(\dfrac{-4x^2+7x+1}{x^2+x+1}\right)'=\dfrac{(-8x+7)\cdot(x^2+x+1)-(-4x^2+7x+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$$= \frac{-11x^2 - 10x + 6}{(x^2 + x + 1)^2}$$

(18) $$\left(\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 3x + 5}\right)' = \frac{(4x-1)\cdot(x^2+3x+5) - (2x^2-x-1)\cdot(2x+3)}{(x^2+3x+5)^2} = \frac{7x^2+22x-2}{(x^2+3x+5)^2}$$

(19) $$\left(\frac{x^2 - 4x + 7}{2x^2 - x + 3}\right)' = \frac{(2x-4)\cdot(2x^2-x+3) - (x^2-4x+7)\cdot(4x-1)}{(2x^2-x+3)^2} = \frac{7x^2-22x-5}{(2x^2-x+3)^2}$$

(20) $$\left(\frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 2}\right)' = \frac{(2x-3)\cdot(x^2+x+2) - (x^2-3x-1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x+2)^2} = \frac{4x^2+6x-5}{(x^2+x+2)^2}$$

(21) $$\left(\frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 1}{x+1}\right)' = \frac{(3x^2+8x+5)\cdot(x+1) - (x^3+4x^2+5x+1)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 4}{(x+1)^2}$$

(22) $$\left(\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 + x}\right)' = \frac{(4x^3+2x)\cdot(x^3+x) - (x^4+x^2+1)\cdot(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}$$

$$= \frac{x^6 + 2x^4 - 2x^2 - 1}{(x^3+x)^2}$$

(23) $(\sin 5x \sin 4x)' = 5\cos 5x \cdot \sin 4x + \sin 5x \cdot 4\cos 4x = 5\cos 5x \sin 4x + 4\sin 5x \cos 4x$

(24) $(\sin 2x \cos 3x)' = 2\cos 2x \cdot \cos 3x + \sin 2x \cdot (-3\sin 3x) = 2\cos 2x \cos 3x - 3\sin 2x \sin 3x$

(25) $(\sin 3x \cos 5x)' = 3\cos 3x \cdot \cos 5x + \sin 3x \cdot (-5\sin 5x) = 3\cos 3x \cos 5x - 5\sin 3x \sin 5x$

(26) $(\cos 7x \cos 4x)' = -7\sin 7x \cdot \cos 4x + \cos 7x \cdot (-4\sin 4x) = -7\sin 7x \cos 4x - 4\cos 7x \sin 4x$

(27) $$\left(\frac{1}{\tan x}\right)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

(28) $$\left(\frac{\sin x}{1 - \cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot (1 - \cos x) - \sin x \cdot \sin x}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$$

$$= \frac{-1 + \cos x}{(1-\cos x)^2} = \frac{-1}{1 - \cos x}$$

(29) $$\left(\frac{\cos x}{1 - \sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot (1 - \sin x) - \cos x \cdot (-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{1 - \sin x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1 - \sin x}$$

(30) $$\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot (1 + \cos x) - \sin x \cdot (-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{1 + \cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}$$

(31) $$\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}\right)' = \frac{-\cos x \cdot (1 + \cos x) - (1 - \sin x) \cdot (-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{-\cos x - \cos^2 x + \sin x - \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{-1 - \cos x + \sin x}{(1+\cos x)^2}$$

(32) $\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}\right)' = \dfrac{\sin x\cdot(1+\sin x)-(1-\cos x)\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2} = \dfrac{\sin x+\sin^2 x-\cos x+\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$

$= \dfrac{1+\sin x-\cos x}{(1+\sin x)^2}$

(33) $\left(\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}\right)' = \dfrac{-\sin x\cdot(\sin x+\cos x)-\cos x\cdot(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$

$= \dfrac{-\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x+\sin x\cos x}{(\sin x+\cos x)^2} = \dfrac{-1}{(\sin x+\cos x)^2}$

(34) $\left(\dfrac{\cos x}{3+\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin x\cdot(3+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(3+\sin x)^2} = \dfrac{-3\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(3+\sin x)^2}$

$= \dfrac{-1-3\sin x}{(3+\sin x)^2}$

(35) $\left(\dfrac{\sin x}{2-\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x\cdot(2-\cos x)-\sin x\cdot\sin x}{(2-\cos x)^2} = \dfrac{2\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x}{(2-\cos x)^2}$

$= \dfrac{-1+2\cos x}{(2-\cos x)^2}$

(36) $\left(\dfrac{\cos x}{1-4\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin x\cdot(1-4\sin x)-\cos x\cdot(-4\cos x)}{(1-4\sin x)^2}$

$= \dfrac{-\sin x+4\sin^2 x+4\cos^2 x}{(1-4\sin x)^2} = \dfrac{4-\sin x}{(1-4\sin x)^2}$

(37) $\left\{\dfrac{\sin(2x+1)}{3x-5}\right\}' = \dfrac{2\cos(2x+1)\cdot(3x-5)-\sin(2x+1)\cdot 3}{(3x-5)^2}$

$= \dfrac{2(3x-5)\cos(2x+1)-3\sin(2x+1)}{(3x-5)^2}$

(38) $(e^{3x}-6e^{2x}+9e^x+2)' = 3e^{3x}-12e^{2x}+9e^x$

(39) $\{(x-1)e^{x-2}\}' = 1\cdot e^{x-2}+(x-1)\cdot e^{x-2} = xe^{x-2}$

(40) $(x^2e^{-x})' = 2x\cdot e^{-x}+x^2\cdot(-e^{-x}) = (2x-x^2)e^{-x}$

(41) $\{(x^2-3)e^x\}' = 2x\cdot e^x+(x^2-3)\cdot e^x = (x^2+2x-3)e^x$

(42) $\{(x^2+4x+4)e^{-x}\}' = (2x+4)\cdot e^{-x}+(x^2+4x+4)\cdot(-e^{-x}) = (-x^2-2x)e^{-x}$

(43) $\{(x^2-2x-11)e^{\frac{x}{2}}\}' = (2x-2)\cdot e^{\frac{x}{2}}+(x^2-2x-11)\cdot\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \left(\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{15}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}$

(44) $\{(x^2+3x)e^{-\frac{x}{2}}\}' = (2x+3)\cdot e^{-\frac{x}{2}}+(x^2+3x)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right) = \left(-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}+3\right)e^{-\frac{x}{2}}$

(45) $\{(2x^3+3x^2+4x+4)e^{-x}\}' = (6x^2+6x+4)\cdot e^{-x}+(2x^3+3x^2+4x+4)\cdot(-e^{-x})$

$= (-2x^3+3x^2+2x)e^{-x}$

(46) $(e^{-x}\sin 2x)' = -e^{-x}\cdot\sin 2x+e^{-x}\cdot 2\cos 2x = e^{-x}(-\sin 2x+2\cos 2x)$

(47) $(e^{3x}\cos 5x)' = 3e^{3x}\cdot\cos 5x+e^{3x}\cdot(-5\sin 5x) = e^{3x}(3\cos 5x-5\sin 5x)$

(48) $(x^2\log x-x)' = \left(2x\cdot\log x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}\right)-1 = 2x\log x+x-1$

(49) $(x^3\log 2x)' = 3x^2\cdot\log 2x + x^3\cdot\dfrac{2}{2x} = 3x^2\log 2x + x^2$

(50) $\{\log x(2\log x-1)\}' = \dfrac{1}{x}\cdot(2\log x-1)+\log x\cdot\dfrac{2}{x} = \dfrac{4\log x-1}{x}$

(51) $\{(\log x-1)(2\log x+x^3-4x)\}' = \dfrac{1}{x}\cdot(2\log x+x^3-4x)+(\log x-1)\cdot\left(\dfrac{2}{x}+3x^2-4\right)$

$= \dfrac{2}{x}\log x + x^2 - 4 + \left(\dfrac{2}{x}+3x^2-4\right)\log x - \dfrac{2}{x} - 3x^2 + 4 = \left(3x^2-4+\dfrac{4}{x}\right)\log x - 2x^2 - \dfrac{2}{x}$

(52) $\left(\dfrac{e^x-2}{3e^x+4}\right)' = \dfrac{e^x\cdot(3e^x+4)-(e^x-2)\cdot 3e^x}{(3e^x+4)^2} = \dfrac{3e^{2x}+4e^x-3e^{2x}+6e^x}{(3e^x+4)^2} = \dfrac{10e^x}{(3e^x+4)^2}$

(53) $\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)' = \dfrac{(e^x+e^{-x})\cdot(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})\cdot(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$

$= \dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

(54) $\left(\dfrac{x}{\log x-1}\right)' = \dfrac{1\cdot(\log x-1)-x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x-1)^2} = \dfrac{\log x-2}{(\log x-1)^2}$

(55) $\left(\dfrac{e^{\frac{x}{4}}}{x^2-3x+18}\right)' = \dfrac{\dfrac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}\cdot(x^2-3x+18)-e^{\frac{x}{4}}\cdot(2x-3)}{(x^2-3x+18)^2}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{4}\{(x^2-3x+18)-4(2x-3)\}e^{\frac{x}{4}}}{(x^2-3x+18)^2} = \dfrac{(x^2-11x+30)e^{\frac{x}{4}}}{4(x^2-3x+18)^2}$

(56) $\left(\dfrac{xe^x}{e^x+3}\right)' = \dfrac{(1\cdot e^x+x\cdot e^x)\cdot(e^x+3)-xe^x\cdot e^x}{(e^x+3)^2} = \dfrac{e^x\{(1+x)(e^x+3)-xe^x\}}{(e^x+3)^2}$

$= \dfrac{e^x(e^x+3+xe^x+3x-xe^x)}{(e^x+3)^2} = \dfrac{e^x(e^x+3x+3)}{(e^x+3)^2}$

(57) $\left(\dfrac{xe^{5x}}{e^x-2}\right)' = \dfrac{(1\cdot e^{5x}+x\cdot 5e^{5x})\cdot(e^x-2)-xe^{5x}\cdot e^x}{(e^x-2)^2} = \dfrac{e^{5x}\{(1+5x)(e^x-2)-xe^x\}}{(e^x-2)^2}$

$= \dfrac{e^{5x}(e^x-2+5xe^x-10x-xe^x)}{(e^x-2)^2} = \dfrac{e^{5x}(4xe^x+e^x-10x-2)}{(e^x-2)^2}$

(58) $\left(\dfrac{x\cos 4x}{\log x}\right)' = \dfrac{\{1\cdot\cos 4x+x\cdot(-4\sin 4x)\}\cdot\log x - x\cos 4x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x)^2}$

$= \dfrac{\cos 4x\log x-4x\sin 4x\log x-\cos 4x}{(\log x)^2}$

(59) $\left(\dfrac{x\log x}{\log x+1}\right)' = \dfrac{\left(1\cdot\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)\cdot(\log x+1)-x\log x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x+1)^2} = \dfrac{(\log x+1)^2-\log x}{(\log x+1)^2}$

$= \dfrac{(\log x)^2+\log x+1}{(\log x+1)^2}$

(60) $\left(\dfrac{x\log x}{x+\log x}\right)' = \dfrac{\left(1\cdot\log x + x\cdot\dfrac{1}{x}\right)\cdot(x+\log x) - x\log x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{(x+\log x)^2}$

$= \dfrac{x\log x + (\log x)^2 + x + \log x - x\log x - \log x}{(x+\log x)^2} = \dfrac{x+(\log x)^2}{(x+\log x)^2}$

(61) $\left(\dfrac{x\log x}{x-\log x}\right)' = \dfrac{\left(1\cdot\log x + x\cdot\dfrac{1}{x}\right)\cdot(x-\log x) - x\log x\cdot\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{(x-\log x)^2}$

$= \dfrac{x\log x - (\log x)^2 + x - \log x - x\log x + \log x}{(x-\log x)^2} = \dfrac{x-(\log x)^2}{(x-\log x)^2}$

(62) $\left(\dfrac{e^x}{x\log x}\right)' = \dfrac{e^x\cdot x\log x - e^x\cdot\left(1\cdot\log x + x\cdot\dfrac{1}{x}\right)}{(x\log x)^2} = \dfrac{e^x(x\log x - \log x - 1)}{(x\log x)^2}$

(63) $\left(\dfrac{e^{2x}\log x}{\log x - 3}\right)' = \dfrac{\left(2e^{2x}\cdot\log x + e^{2x}\cdot\dfrac{1}{x}\right)\cdot(\log x - 3) - e^{2x}\log x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x-3)^2}$

$= \dfrac{e^{2x}\left\{\left(2\log x + \dfrac{1}{x}\right)(\log x - 3) - \dfrac{\log x}{x}\right\}}{(\log x - 3)^2}$

$= \dfrac{e^{2x}\left\{2(\log x)^2 - 6\log x + \dfrac{\log x}{x} - \dfrac{3}{x} - \dfrac{\log x}{x}\right\}}{(\log x-3)^2} = \dfrac{e^{2x}\left\{2(\log x)^2 - 6\log x - \dfrac{3}{x}\right\}}{(\log x - 3)^2}$

$= \dfrac{e^{2x}\left\{2x(\log x)^2 - 6x\log x - 3\right\}}{x(\log x-3)^2}$

(64) $\left\{\left(\dfrac{x+1}{2x^2+1}\right)^4\right\}' = 4\left(\dfrac{x+1}{2x^2+1}\right)^3\cdot\dfrac{1\cdot(2x^2+1)-(x+1)\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}$

$= 4\left(\dfrac{x+1}{2x^2+1}\right)^3\cdot\dfrac{-2x^2-4x+1}{(2x^2+1)^2} = \dfrac{4(-2x^2-4x+1)(x+1)^3}{(2x^2+1)^5}$

(65) $\left\{\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3\right\}' = 3\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2\cdot\dfrac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = 3\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2\cdot\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{3x^2(-x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

(66) $\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)' = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

(67) $\left(\sqrt{1+\sin^2 x}\right)' = \dfrac{2\sin x\cdot\cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} = \dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

(68) $\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}}\cdot\dfrac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}\cdot\dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

(69) $$\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

(70) $$\left(\sqrt{\frac{5x-2}{7x+13}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{5x-2}{7x+13}}} \cdot \frac{5\cdot(7x+13)-(5x-2)\cdot 7}{(7x+13)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7x+13}{5x-2}} \cdot \frac{79}{(7x+13)^2} = \frac{79}{2(7x+13)^2}\sqrt{\frac{7x+13}{5x-2}}$$

(71) $$\left(\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x+1}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x+1}}} \cdot \frac{(2x-4)\cdot(x+1)-(x^2-4x+3)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x^2-4x+3}} \cdot \frac{x^2+2x-7}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-7}{2(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x^2-4x+3}}$$

(72) $$\left(x\sqrt{9-x^2}\right)' = 1\cdot\sqrt{9-x^2} + x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \sqrt{9-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{(9-x^2)-x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$= \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

(73) $$\left\{(x+1)\sqrt{1-x^2}\right\}' = 1\cdot\sqrt{1-x^2} + (x+1)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{(x+1)x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{(1-x^2)-(x^2+x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

(74) $$\left\{(x+2)\sqrt{x^2-1}\right\}' = 1\cdot\sqrt{x^2-1} + (x+2)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} + \frac{(x+2)x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{(x^2-1)+(x^2+2x)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2+2x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(75) $$\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+1}-(x+1)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x^2+1)-(x^2+x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

(76) $$\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{-1\cdot\sqrt{1+x^2}-(1-x)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{-\sqrt{1+x^2}-\frac{(1-x)x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{-(1+x^2)-(x-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{-1-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

(77) $\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-x^2}}\right)' = \dfrac{1\cdot\sqrt{4x-x^2}-(x-3)\cdot\dfrac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}}{4x-x^2}$

$= \dfrac{\sqrt{4x-x^2}-\dfrac{(x-3)(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}}}{4x-x^2} = \dfrac{(4x-x^2)-(-x^2+5x-6)}{(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}} = \dfrac{-x+6}{(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}}$

(78) $\left(\dfrac{1+2x}{\sqrt{3-5x-x^2}}\right)' = \dfrac{2\cdot\sqrt{3-5x-x^2}-(1+2x)\cdot\dfrac{-5-2x}{2\sqrt{3-5x-x^2}}}{3-5x-x^2}$

$= \dfrac{2\sqrt{3-5x-x^2}+\dfrac{(1+2x)(5+2x)}{2\sqrt{3-5x-x^2}}}{3-5x-x^2} = \dfrac{4(3-5x-x^2)+(5+12x+4x^2)}{2(3-5x-x^2)\sqrt{3-5x-x^2}}$

$= \dfrac{17-8x}{2(3-5x-x^2)\sqrt{3-5x-x^2}}$

(79) $\left\{\dfrac{(\log x)^2}{x}\right\}' = \dfrac{\left(2\log x\cdot\dfrac{1}{x}\right)\cdot x-(\log x)^2\cdot 1}{x^2} = \dfrac{(2-\log x)\log x}{x^2}$

(80) $\left(\dfrac{\sin^5 x}{x^3}\right)' = \dfrac{(5\sin^4 x\cdot\cos x)\cdot x^3-\sin^5 x\cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{x^2\sin^4 x(5x\cos x-3\sin x)}{x^6}$

$= \dfrac{(5x\cos x-3\sin x)\sin^4 x}{x^4}$

(81) $\{\log(e^x+\sin x)\}' = \dfrac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}$

(82) $\{\log(e^{2x}+x)\}' = \dfrac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}$

(83) $\{\log(\tan x)\}' = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan x} = \dfrac{1}{\sin x\cos x}$

(84) $\{\log(\log x)^3\}' = \dfrac{3(\log x)^2\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x)^3} = \dfrac{3}{x\log x}$

(85) $\left\{\log(x+\sqrt{x^2+7})\right\}' = \dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}} = \dfrac{\sqrt{x^2+7}+x}{\sqrt{x^2+7}\,(x+\sqrt{x^2+7})} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+7}}$

(86) $\left\{\log(-x+\sqrt{x^2+4})\right\}' = \dfrac{-1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{-x+\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{-\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}\,(-x+\sqrt{x^2+4})} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

(87) $\left(\log|x-\sqrt{x^2+9}|\right)' = \dfrac{1-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{x-\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{\sqrt{x^2+9}-x}{\sqrt{x^2+9}\,(x-\sqrt{x^2+9})} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$

(88) $\left(\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)' = \{\log(1-\cos x)-\log(1+\cos x)\}' = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}-\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}$

$$= \frac{\sin x(1+\cos x)+\sin x(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{\sin x+\sin x\cos x+\sin x-\sin x\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$= \frac{2\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{2\sin x}{1-\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin x}$$

(89) $\left(\log\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)'$

$$= \frac{1}{\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}} \cdot \frac{(-\sin x+\cos x)\cdot(\cos x-\sin x)-(\cos x+\sin x)\cdot(-\sin x-\cos x)}{(\cos x-\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x} \cdot \frac{(\cos x-\sin x)^2+(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x-\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}$$

$$= \frac{2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)} = \frac{2}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \frac{2}{\cos 2x}$$

(90) $\left(\log\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)' = \left\{\log x-\log(\sqrt{x^2+1}+1)\right\}' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}+1}$

$$= \frac{1}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)-x^2}{x\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$= \frac{x^2+1+\sqrt{x^2+1}-x^2}{x\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

(91) $x>0$ のとき，$x^{\sqrt{x}} = e^{\log x^{\sqrt{x}}} = e^{\sqrt{x}\log x}$ であるから

$$\left(x^{\sqrt{x}}\right)' = \left(e^{\sqrt{x}\log x}\right)' = e^{\sqrt{x}\log x}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\log x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\right) = x^{\sqrt{x}}\cdot\frac{\log x+2}{2\sqrt{x}}$$

(92) $x>0$ のとき，$x^{\tan x} = e^{\log x^{\tan x}} = e^{\tan x\log x}$ であるから

$$\left(x^{\tan x}\right)' = \left(e^{\tan x\log x}\right)' = e^{\tan x\log x}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\log x+\tan x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^{\tan x}\left(\frac{\log x}{\cos^2 x}+\frac{\tan x}{x}\right)$$

(93) $x>1$ のとき，$(\log x)^{\sin x} = e^{\log(\log x)^{\sin x}} = e^{\sin x\log(\log x)}$ であるから

$$\left\{(\log x)^{\sin x}\right\}' = \left\{e^{\sin x\log(\log x)}\right\}' = e^{\sin x\log(\log x)}\cdot\left\{\cos x\cdot\log(\log x)+\sin x\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\log x}\right\}$$

$$= (\log x)^{\sin x}\left\{\cos x\log(\log x)+\frac{\sin x}{x\log x}\right\}$$

(94) $x<-1,\ 0<x$ のとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{\log(1+\frac{1}{x})^x} = e^{x\log(1+\frac{1}{x})}$ であるから

$$\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}' = \left\{e^{x\log(1+\frac{1}{x})}\right\}' = e^{x\log(1+\frac{1}{x})}\cdot\left\{1\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right\}$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}$$

【問題 1.3】
次の関数の増減を調べ，極値を求めよ．

(1) $\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$

(2) $\dfrac{2x-1}{x^2-2x+3}$

(3) $(4x^3+16x^2+10x+5)e^{-2x}$

(4) $\dfrac{2x^2+x-2}{x^2+x-2}$

(5) $\dfrac{x^3}{3}+x+2\log|x|$

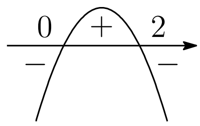
(6) $\dfrac{3x^2+1}{(x-1)^3}$

(7) $x+\sqrt{9-x^2}$

解答

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\cdot(x^2-x+1)-(x-1)\cdot(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2+2x}{(x^2-x+1)^2} \\ &= \frac{-x(x-2)}{(x^2-x+1)^2} \end{aligned}$$



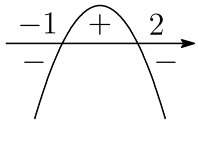
$f'(x)$ の分母は $(x^2-x+1)^2>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は分子の $-x(x-2)$ が決める．分子 $-x(x-2)$ のグラフは上図のようになるから，$f'(x)$ の符号がわかる．よって，増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$

$$\therefore \begin{cases} x=2 \text{ のとき極大値 } \dfrac{1}{3} \\ x=0 \text{ のとき極小値 } -1 \end{cases}$$

(2) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-2x+3}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\cdot(x^2-2x+3)-(2x-1)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2} \\ &= \frac{-2x^2+2x+4}{(x^2-2x+3)^2} \\ &= \frac{-2(x+1)(x-2)}{(x^2-2x+3)^2} \end{aligned}$$



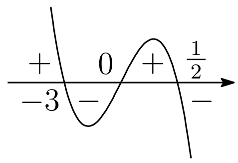
$f'(x)$ の分母は $(x^2-2x+3)^2>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は分子の $-2(x+1)(x-2)$ が決める．分子 $-2(x+1)(x-2)$ のグラフは上図のようになるから，$f'(x)$ の符号がわかる．よって，増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$

$$\therefore \begin{cases} x=2 \text{ のとき極大値 } 1 \\ x=-1 \text{ のとき極小値 } -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(3) $f(x)=(4x^3+16x^2+10x+5)e^{-2x}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= (12x^2+32x+10)\cdot e^{-2x}+(4x^3+16x^2+10x+5)\cdot(-2e^{-2x}) \\ &= (-8x^3-20x^2+12x)e^{-2x} \\ &= -4x(x+3)(2x-1)e^{-2x} \end{aligned}$$



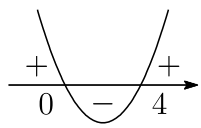
$e^{-2x}>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は $-4x(x+3)(2x-1)$ が決める．$-4x(x+3)(2x-1)$ のグラフは上図のようになるから，$f'(x)$ の符号がわかる．よって，増減表は

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$11e^6$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$\frac{29}{2e}$	$\searrow$

$$\therefore \begin{cases} x=-3 \text{ のとき極大値 } 11e^6 \\ x=0 \text{ のとき極小値 } 5 \\ x=\dfrac{1}{2} \text{ のとき極大値 } \dfrac{29}{2e} \end{cases}$$

(4) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-2}{x^2+x-2}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x+1)\cdot(x^2+x-2)-(2x^2+x-2)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} \\ &= \frac{x^2-4x}{(x^2+x-2)^2} \\ &= \frac{x(x-4)}{(x^2+x-2)^2} \end{aligned}$$



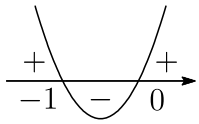
$f'(x)$ の分母は $(x^2+x-2)^2>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は分子の $x(x-4)$ が決める．分子 $x(x-4)$ のグラフは上図のようになるから，$f'(x)$ の符号がわかる．よって，増減表は

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\times$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	$\frac{17}{9}$	$\nearrow$

$$\therefore \begin{cases} x=0 \text{ のとき極大値 } 1 \\ x=4 \text{ のとき極小値 } \dfrac{17}{9} \end{cases}$$

(5) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x + 2\log|x|$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2+1+\frac{2}{x} \\ &= \frac{x^3+x+2}{x} \\ &= \frac{x(x+1)(x^2-x+2)}{x^2} \end{aligned}$$



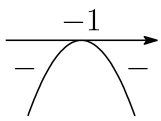
$f'(x)$ の分母は $x^2>0$ であり，分子において $x^2-x+2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は分子にある $x(x+1)$ が決める．分子にある $x(x+1)$ のグラフは上図のようになるから，$f'(x)$ の符号がわかる．よって，増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{4}{3}$	$\searrow$		$\nearrow$

$$\therefore \begin{cases} x=-1 \text{ のとき極大値 } -\dfrac{4}{3} \\ \text{極小値なし} \end{cases}$$

(6) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{(x-1)^3}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6x\cdot(x-1)^3-(3x^2+1)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} \\ &= \frac{3(x-1)^2\{2x(x-1)-(3x^2+1)\}}{(x-1)^6} \\ &= \frac{3(-x^2-2x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{-3(x+1)^2}{(x-1)^4} \end{aligned}$$



$f'(x)$ の分母は $(x-1)^4>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は分子の $-3(x+1)^2$ が決める．分子の $-3(x+1)^2$ のグラフは上図のようになるから，$f'(x)$ の符号がわかる．よって，増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$		$\searrow$

$\therefore$ 極値なし

(7) $f(x)=x+\sqrt{9-x^2}$ とおくと

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\frac{\sqrt{9-x^2}-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

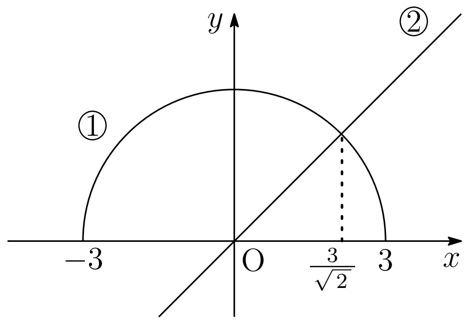
である．$f'(x)$ の分母は $\sqrt{9-x^2}>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は分子の $\sqrt{9-x^2}-x$ が決める．このグラフをかくのではなく，曲線 $y=\sqrt{9-x^2}\ \cdots$① と直線 $y=x\ \cdots$② の上下関係で符合を決めにいく．ここで，① は

$$y^2=9-x^2 \quad \text{かつ} \quad y \geqq 0$$

すなわち

$$x^2+y^2=9 \quad \text{かつ} \quad y \geqq 0$$

であるから，原点中心，半径 3 の円の上半分である．よって，① と ② の概形は右図のようになる．



したがって，増減表は

x	-3	$\cdots$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	3

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}} \text{ のとき極大値 } 3\sqrt{2} \\ \text{極小値なし} \end{cases}$$

★L'Hospital（ロピタル）の定理

$f(x), g(x)$ が (a,b) で微分可能で，$g'(x)\neq 0$ $(a<x<b)$ のとき，

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a+0} g(x)=0, \quad \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

であれば

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

が成り立つ．

※ L'Hospital の定理にはいろいろな形があり，おおざっぱにいうと次のようになる．

$\dfrac{\lim\limits_{x\to\square} f(x)}{\lim\limits_{x\to\square} g(x)}$ が不定形，すなわち，$\dfrac{0}{0}$ や $\dfrac{(\pm)\infty}{(\pm)\infty}$ の形になるとき，$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば，$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が成り立つ．

【問題 1.4】

L'Hospital の定理を用いて，次の極限値を求めよ．ただし，不定形であることは述べなくてよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{1-\cos x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)+e^{-x}-1}{\sin x-x\cos x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\sin x}{x^2}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\log(\cos x)}{x^2\sin^2 x}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x}{\tan^3 x}\right)$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin^3 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-\frac{2}{x}\right)$

(14) $\displaystyle\lim_{x\to +0}(\sin x)^x$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

(16) $\displaystyle\lim_{x\to +0}(\sin x)^{\frac{1}{\log x}}$

解答

今後，L'Hospital の定理を用いる部分を「$\overset{*}{=}$」で表すことにする．

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{1-\cos x}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 4\right)=1\cdot 1\cdot 4=4$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2\right\}=\frac{1}{3}\cdot 1^2=\frac{1}{3}$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\left\{1\cdot\log(1+x)+(1+x)\cdot\dfrac{1}{1+x}\right\}}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\log(1+x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\log(1+x)}{x}\right\}=-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}$$

(5) $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)+e^{-x}-1}{\sin x-x\cos x}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-e^{-x}}{\cos x-\{1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)\}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{e^x}}{x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(1+x)e^x\sin x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{(1+x)e^x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{e^x-1-x}{x^2}\right\}=\frac{1}{1\cdot 1}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

(6) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\sin x}{x^2} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)\cos x}{2x(1+x)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{2(1+x)}\cdot\frac{1-(1+x)\cos x}{x}\right\} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)\cos x}{x}$

$\displaystyle \overset{*}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\{1\cdot\cos x+(1+x)\cdot(-\sin x)\}}{1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\{-\cos x+(1+x)\sin x\} = \frac{1}{2}\cdot(-1) = -\frac{1}{2}$

※ $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x-\cos x\right) = \frac{1}{2}\cdot 0-1 = -1$

と計算することもできる.

(7) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\log(\cos x)}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{x^2+2\log(\cos x)}{x^4}\right\} = 1^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\log(\cos x)}{x^4}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\log(\cos x)}{x^4} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x+2\cdot\dfrac{-\sin x}{\cos x}}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{2x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}\right)$

$\displaystyle \overset{(3)}{=} -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$

(8) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}\right) \overset{(3)}{=} 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

(9) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x}{\tan^3 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^3 x-x^3}{x^2\tan^3 x} = \lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\tan x}\right)^3\cdot\frac{\tan^3 x-x^3}{x^5}\right\}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\tan x}\right)^3\cdot\frac{(\tan x-x)(\tan^2 x+x\tan x+x^2)}{x^5}\right\}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{\tan x}\right)^3\cdot\left\{\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2+\frac{\tan x}{x}+1\right\}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}\right] \overset{(3)}{=} 1^3\cdot(1^2+1+1)\cdot\frac{1}{3} = 1$

(10) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}\right) \overset{(2)}{=} 1\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

(11) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right\}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^4}\right\} = \lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}\right\}$

$\displaystyle \overset{(2)}{=} 1^2\cdot(1+1)\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

(12) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin^3 x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^3-\sin^3 x}{x^2\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3\cdot\frac{x^3-\sin^3 x}{x^5}\right\}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3\cdot\frac{(x-\sin x)(x^2+x\sin x+\sin^2 x)}{x^5}\right\}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3\cdot\left\{1+\frac{\sin x}{x}+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right\}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}\right] \overset{(2)}{=} 1^3\cdot(1+1+1^2)\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

(13) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^2(e^x-1)}$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}\right\} = 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\{1\cdot(e^x+1)+x\cdot e^x\}-2e^x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^x+1}{3x^2}$$

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1\cdot e^x+(x-1)\cdot e^x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}$$

(14) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x>0$ であるから

$(\sin x)^x = e^{\log(\sin x)^x} = e^{x\log(\sin x)}$

ここで

$$\lim_{x\to +0} x\log(\sin x) = \lim_{x\to +0}\frac{\log(\sin x)}{\dfrac{1}{x}} \overset{*}{=} \lim_{x\to +0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +0}\left(-\frac{x}{\tan x}\cdot x\right) = -1\cdot 0 = 0$$

であるから,（指数関数の連続性より）

$\displaystyle\lim_{x\to +0}(\sin x)^x = \lim_{x\to +0} e^{x\log(\sin x)} = e^0 = 1$

(15) $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos x>0$ であるから

$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = e^{\frac{\log(\cos x)}{x^2}}$

ここで

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan x}{x}\right) = -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

であるから,（指数関数の連続性より）

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(\cos x)}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(16) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x>0$ であるから

$(\sin x)^{\frac{1}{\log x}} = e^{\log(\sin x)^{\frac{1}{\log x}}} = e^{\frac{\log(\sin x)}{\log x}}$

ここで

$$\lim_{x\to +0}\frac{\log(\sin x)}{\log x} \overset{*}{=} \lim_{x\to +0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to +0}\frac{x}{\tan x} = 1$$

であるから,（指数関数の連続性より）

$\displaystyle\lim_{x\to +0}(\sin x)^{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x\to +0} e^{\frac{\log(\sin x)}{\log x}} = e^1 = e$

★逆三角関数

(1) $\sin : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ の逆関数を arcsin（アークサイン）で表す．

(2) $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ の逆関数を arccos （アークコサイン）で表す．

(3) $\tan : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ の逆関数を arctan（アークタンジェント）で表す．

※ $\arcsin \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とは，$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす角 θ のことである．角 θ を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ から見つけなければいけないことに注意する．arccos, arctan のときは，角 θ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ からそれぞれ見つけなければいけない．

【問題 1.5】
次の値を求めよ．

(1) $\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\arcsin \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $\arcsin(-1)$

(4) $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(5) $\arccos \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(6) $\arccos \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(7) $\arctan \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(8) $\arctan(-1)$

(9) $\sin \left(\arctan \dfrac{12}{5}\right)$

(10) $\tan \left(\arccos \dfrac{1}{8}\right)$

(11) $\arccos \left(\sin \dfrac{\pi}{5}\right)$

(12) $\arctan \left(\tan \dfrac{4}{7}\pi\right)$

(13) $\arctan \dfrac{2}{9} + \arctan \dfrac{7}{11}$

(14) $\arctan \dfrac{3}{4} + \arctan \dfrac{1}{8}$

(15) $2\arctan \dfrac{1}{2} - \arctan \dfrac{1}{5} + \arctan \dfrac{1}{18}$

解答

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をみたす角 θ を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲から見つけて　$\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$

(2) $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ をみたす角 θ を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲から見つけて　$\arcsin \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$

(3) $\sin\theta = -1$ をみたす角 θ を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲から見つけて　$\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$

(4) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をみたす角 θ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲から見つけて　$\arccos \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$

(5) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ をみたす角 θ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲から見つけて　$\arccos \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}\pi$

(6) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をみたす角 θ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲から見つけて　$\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5}{6}\pi$

(7) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ をみたす角 θ を $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲から見つけて　$\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$

(8) $\tan\theta = -1$ をみたす角 θ を $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲から見つけて　$\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

(9) $\arctan\dfrac{12}{5} = \alpha$ とおくと　$\tan\alpha = \dfrac{12}{5}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

底辺が 5，高さが 12 の直角三角形の斜辺は 13 であるから　$\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$

よって　$\sin\left(\arctan\dfrac{12}{5}\right) = \dfrac{12}{13}$

(10) $\arccos\dfrac{1}{8} = \alpha$ とおくと　$\cos\alpha = \dfrac{1}{8}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

斜辺が 8，底辺が 1 の直角三角形の高さは $3\sqrt{7}$ であるから　$\tan\alpha = 3\sqrt{7}$

よって　$\tan\left(\arccos\dfrac{1}{8}\right) = 3\sqrt{7}$

(11) $\sin\dfrac{\pi}{5} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{5}\right) = \cos\dfrac{3}{10}\pi$ であって，$\dfrac{3}{10}\pi$ は $[0, \pi]$ に入る．

よって　$\arccos\left(\sin\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{3}{10}\pi$

(12) $\tan\dfrac{4}{7}\pi = \tan\left(\dfrac{4}{7}\pi - \pi\right) = \tan\left(-\dfrac{3}{7}\pi\right)$ であって，$-\dfrac{3}{7}\pi$ は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に入る．

よって　$\arctan\left(\tan\dfrac{4}{7}\pi\right) = -\dfrac{3}{7}\pi$

※ $\dfrac{4}{7}\pi$ は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に入らないから，$\arctan\left(\tan\dfrac{4}{7}\pi\right) = \dfrac{4}{7}\pi$ とはならないことに注意する．

(13) $\arctan\dfrac{2}{9} = \alpha,\ \arctan\dfrac{7}{11} = \beta$ とおくと　$\tan\alpha = \dfrac{2}{9},\ \tan\beta = \dfrac{7}{11}$ $\left(0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{4}\right)$

このとき

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{2}{9} + \dfrac{7}{11}}{1 - \dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{7}{11}} = \frac{22+63}{99-14} = \frac{85}{85} = 1$$

ここで，$0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{4}$ のとき $0 < \alpha+\beta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$

よって　$\arctan\dfrac{2}{9} + \arctan\dfrac{7}{11} = \dfrac{\pi}{4}$

(14) $\arctan\dfrac{3}{4} = \alpha,\ \arctan\dfrac{1}{8} = \beta$ とおくと　$\tan\alpha = \dfrac{3}{4},\ \tan\beta = \dfrac{1}{8}$ $\left(0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{4}\right)$

このとき

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{8}}{1 - \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{8}} = \frac{24+4}{32-3} = \frac{28}{29}$$

ここで，$0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき $0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\alpha+\beta=\arctan\dfrac{28}{29}$

よって　$\arctan\dfrac{3}{4}+\arctan\dfrac{1}{8}=\arctan\dfrac{28}{29}$

(15) $\arctan\dfrac{1}{2}=\alpha,\ \arctan\dfrac{1}{5}=\beta,\ \arctan\dfrac{1}{18}=\gamma$ とおくと

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2},\ \tan\beta=\dfrac{1}{5},\ \tan\gamma=\dfrac{1}{18}\ \left(0<\alpha,\beta,\gamma<\dfrac{\pi}{4}\right)$

このとき

$$\tan 2\alpha=\frac{2\cdot\dfrac{1}{2}}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{4-1}=\frac{4}{3}$$

$$\tan(2\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{5}}{1+\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{5}}=\frac{20-3}{15+4}=\frac{17}{19}$$

$$\tan(2\alpha-\beta+\gamma)=\frac{\dfrac{17}{19}+\dfrac{1}{18}}{1-\dfrac{17}{19}\cdot\dfrac{1}{18}}=\frac{306+19}{342-17}=\frac{325}{325}=1$$

ここで，$0<\alpha,\beta,\gamma<\dfrac{\pi}{4}$ のとき $-\dfrac{\pi}{4}<2\alpha-\beta+\gamma<\dfrac{3}{4}\pi$ であるから　$2\alpha-\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$

よって　$2\arctan\dfrac{1}{2}-\arctan\dfrac{1}{5}+\arctan\dfrac{1}{18}=\dfrac{\pi}{4}$

★逆三角関数の導関数

(1) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1)$

(2) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1)$

(3) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}\quad(x\in\mathbb{R})$

【問題 1.6】

次の関数を微分せよ.

(1) $\arctan e^x$

(2) $\arctan\dfrac{2}{x}$

(3) $\arcsin\sqrt{x}$

(4) $\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}$

(5) $\arctan\sqrt{x^2-1}$

(6) $\arctan\dfrac{3+x}{1-3x}$

(7) $\arctan\dfrac{2x+5}{5x-2}$

(8) $\arctan\dfrac{3x+4}{4x-3}$

(9) $\arctan\dfrac{2x+5}{x+1}$

(10) $\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

(11) $\arctan\sqrt{\dfrac{x+5}{x+1}}$

(12) $\arctan\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+1}}$

(13) $\arctan\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-3}}$

(14) $\arctan\sqrt{\dfrac{2x+7}{5x-1}}$

(15) $\arctan\sqrt{\dfrac{3x-4}{7x+5}}$

(16) $\arctan\sqrt{\dfrac{5x+11}{2x-3}}$

(17) $\arctan\sqrt{\dfrac{7x-9}{2x+1}}$

(18) $\arctan\sqrt{\dfrac{2x-9}{7x+11}}$

(19) $\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$

(20) $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

(21) $\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

(22) $\arctan(x+\sqrt{x^2+1})$

(23) $\arctan\dfrac{2x}{x^2-1}$

(24) $\arctan\dfrac{1-2x-x^2}{1+2x-x^2}$

(25) $\arcsin\sqrt{1-x^2}$

(26) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(27) $\arccos\dfrac{2x}{x^2+1}$

(28) $\arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

解答

(1) $(\arctan e^x)'=\dfrac{1}{1+(e^x)^2}\cdot e^x=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

(2) $\left(\arctan\dfrac{2}{x}\right)'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)=-\dfrac{2}{x^2+4}$

(3) $(\arcsin\sqrt{x})'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$

(4) $(\sqrt{x}\arctan\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\arctan\sqrt{x}+\sqrt{x}\cdot\left\{\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right\}$

$=\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2(1+x)}=\dfrac{(1+x)\arctan\sqrt{x}+\sqrt{x}}{2(1+x)\sqrt{x}}$

(5) $\left(\arctan\sqrt{x^2-1}\right)'=\dfrac{1}{1+(\sqrt{x^2-1})^2}\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(6) $\left(\arctan\dfrac{3+x}{1-3x}\right)'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{3+x}{1-3x}\right)^2}\cdot\dfrac{1\cdot(1-3x)-(3+x)\cdot(-3)}{(1-3x)^2}$

$=\dfrac{(1-3x)^2}{(1-3x)^2+(3+x)^2}\cdot\dfrac{10}{(1-3x)^2}=\dfrac{10}{10(1+x^2)}=\dfrac{1}{1+x^2}$

(7) $\left(\arctan\dfrac{2x+5}{5x-2}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x+5}{5x-2}\right)^2}\cdot\dfrac{2\cdot(5x-2)-(2x+5)\cdot 5}{(5x-2)^2}$

$= \dfrac{(5x-2)^2}{(5x-2)^2+(2x+5)^2}\cdot\dfrac{-29}{(5x-2)^2} = \dfrac{-29}{29(1+x^2)} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

(8) $\left(\arctan\dfrac{3x+4}{4x-3}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{3x+4}{4x-3}\right)^2}\cdot\dfrac{3\cdot(4x-3)-(3x+4)\cdot 4}{(4x-3)^2}$

$= \dfrac{(4x-3)^2}{(4x-3)^2+(3x+4)^2}\cdot\dfrac{-25}{(4x-3)^2} = \dfrac{-25}{25(1+x^2)} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

(9) $\left(\arctan\dfrac{2x+5}{x+1}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x+5}{x+1}\right)^2}\cdot\dfrac{2\cdot(x+1)-(2x+5)\cdot 1}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^2+(2x+5)^2}\cdot\dfrac{-3}{(x+1)^2} = \dfrac{-3}{5x^2+22x+26}$

(10) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)^2}\cdot\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}}\cdot\dfrac{-1\cdot x-(1-x)\cdot 1}{x^2}\right\}$

$= \dfrac{x}{x+(1-x)}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\cdot\dfrac{-1}{x^2} = -\dfrac{1}{2x}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

(11) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{x+5}{x+1}}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{x+5}{x+1}}\right)^2}\cdot\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+5}{x+1}}}\cdot\dfrac{1\cdot(x+1)-(x+5)\cdot 1}{(x+1)^2}\right\}$

$= \dfrac{x+1}{(x+1)+(x+5)}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+5}}\cdot\dfrac{-4}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1}{2(x+3)}\cdot\dfrac{-2}{(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+5}}$

$= -\dfrac{1}{(x+3)(x+1)}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+5}}$

※ $\sqrt{\dfrac{x+5}{x+1}}$ を $\dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+1}}$ とはできないし，答えの分母の $x+1$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(12) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+1}}\right)'$

$= \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+1}}\right)^2}\cdot\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+1}}}\cdot\dfrac{3\cdot(2x+1)-(3x-2)\cdot 2}{(2x+1)^2}\right\}$

$= \dfrac{2x+1}{(2x+1)+(3x-2)}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x-2}}\cdot\dfrac{7}{(2x+1)^2} = \dfrac{2x+1}{5x-1}\cdot\dfrac{7}{2(2x+1)^2}\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x-2}}$

$$= \frac{7}{2(5x-1)(2x+1)}\sqrt{\frac{2x+1}{3x-2}}$$

※ $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+1}}$ を $\dfrac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+1}}$ とはできないし，答えの分母の $2x+1$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(13) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-3}}\right)'$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-3}}\right)^2}\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-3}}}\cdot\frac{3\cdot(2x-3)-(3x+4)\cdot 2}{(2x-3)^2}\right\}$$

$$= \frac{2x-3}{(2x-3)+(3x+4)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x-3}{3x+4}}\cdot\frac{-17}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3}{5x+1}\cdot\frac{-17}{2(2x-3)^2}\sqrt{\frac{2x-3}{3x+4}}$$

$$= \frac{-17}{2(5x+1)(2x-3)}\sqrt{\frac{2x-3}{3x+4}}$$

※ $\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-3}}$ を $\dfrac{\sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x-3}}$ とはできないし，答えの分母の $2x-3$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(14) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{2x+7}{5x-1}}\right)'$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{2x+7}{5x-1}}\right)^2}\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x+7}{5x-1}}}\cdot\frac{2\cdot(5x-1)-(2x+7)\cdot 5}{(5x-1)^2}\right\}$$

$$= \frac{5x-1}{(5x-1)+(2x+7)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5x-1}{2x+7}}\cdot\frac{-37}{(5x-1)^2} = \frac{5x-1}{7x+6}\cdot\frac{-37}{2(5x-1)^2}\sqrt{\frac{5x-1}{2x+7}}$$

$$= \frac{-37}{2(7x+6)(5x-1)}\sqrt{\frac{5x-1}{2x+7}}$$

※ $\sqrt{\dfrac{2x+7}{5x-1}}$ を $\dfrac{\sqrt{2x+7}}{\sqrt{5x-1}}$ とはできないし，答えの分母の $5x-1$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(15) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{3x-4}{7x+5}}\right)'$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{3x-4}{7x+5}}\right)^2}\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{3x-4}{7x+5}}}\cdot\frac{3\cdot(7x+5)-(3x-4)\cdot 7}{(7x+5)^2}\right\}$$

$$= \frac{7x+5}{(7x+5)+(3x-4)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7x+5}{3x-4}}\cdot\frac{43}{(7x+5)^2} = \frac{7x+5}{10x+1}\cdot\frac{43}{2(7x+5)^2}\sqrt{\frac{7x+5}{3x-4}}$$

$$= \frac{43}{2(10x+1)(7x+5)}\sqrt{\frac{7x+5}{3x-4}}$$

※ $\sqrt{\dfrac{3x-4}{7x+5}}$ を $\dfrac{\sqrt{3x-4}}{\sqrt{7x+5}}$ とはできないし，答えの分母の $7x+5$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(16) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{5x+11}{2x-3}}\right)'$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{5x+11}{2x-3}}\right)^2} \cdot \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{5x+11}{2x-3}}} \cdot \frac{5\cdot(2x-3)-(5x+11)\cdot 2}{(2x-3)^2} \right\}$$

$$= \frac{2x-3}{(2x-3)+(5x+11)} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x-3}{5x+11}} \cdot \frac{-37}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3}{7x+8} \cdot \frac{-37}{2(2x-3)^2}\sqrt{\frac{2x-3}{5x+11}}$$

$$= \frac{-37}{2(7x+8)(2x-3)}\sqrt{\frac{2x-3}{5x+11}}$$

※ $\sqrt{\dfrac{5x+11}{2x-3}}$ を $\dfrac{\sqrt{5x+11}}{\sqrt{2x-3}}$ とはできないし，答えの分母の $2x-3$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(17) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{7x-9}{2x+1}}\right)'$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{7x-9}{2x+1}}\right)^2} \cdot \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{7x-9}{2x+1}}} \cdot \frac{7\cdot(2x+1)-(7x-9)\cdot 2}{(2x+1)^2} \right\}$$

$$= \frac{2x+1}{(2x+1)+(7x-9)} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x+1}{7x-9}} \cdot \frac{25}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1}{9x-8} \cdot \frac{25}{2(2x+1)^2}\sqrt{\frac{2x+1}{7x-9}}$$

$$= \frac{25}{2(9x-8)(2x+1)}\sqrt{\frac{2x+1}{7x-9}}$$

※ $\sqrt{\dfrac{7x-9}{2x+1}}$ を $\dfrac{\sqrt{7x-9}}{\sqrt{2x+1}}$ とはできないし，答えの分母の $2x+1$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(18) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{2x-9}{7x+11}}\right)'$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{2x-9}{7x+11}}\right)^2} \cdot \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x-9}{7x+11}}} \cdot \frac{2\cdot(7x+11)-(2x-9)\cdot 7}{(7x+11)^2} \right\}$$

$$= \frac{7x+11}{(7x+11)+(2x-9)} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7x+11}{2x-9}} \cdot \frac{85}{(7x+11)^2} = \frac{7x+11}{9x+2} \cdot \frac{85}{2(7x+11)^2}\sqrt{\frac{7x+11}{2x-9}}$$

$$= \frac{85}{2(9x+2)(7x+11)}\sqrt{\frac{7x+11}{2x-9}}$$

※ $\sqrt{\dfrac{2x-9}{7x+11}}$ を $\dfrac{\sqrt{2x-9}}{\sqrt{7x+11}}$ とはできないし，答えの分母の $7x+11$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(19) $$\left(\frac{\arcsin x}{\arccos x}\right)' = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\arccos x - \arcsin x\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arccos x)^2} = \frac{\arccos x+\arcsin x}{(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

(20) $$\left(\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2} - \arccos x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1+\dfrac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$
$$= \frac{-\sqrt{1-x^2}+x\arccos x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

(21) $$\left(\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{(x\arcsin x)'\cdot\sqrt{1-x^2} - x\arcsin x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$
$$= \frac{\left(1\cdot\arcsin x + x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$
$$= \frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + \dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{(1-x^2)\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}+x^2\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

(22) $$\left\{\arctan(x+\sqrt{x^2+1})\right\}' = \frac{1}{1+(x+\sqrt{x^2+1})^2}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{1+(x^2+2x\sqrt{x^2+1}+x^2+1)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2(x^2+1)+2x\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+x)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2(x^2+1)}$$

(23) $$\left(\arctan\frac{2x}{x^2-1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)^2}\cdot\frac{2\cdot(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{(x^2-1)^2}{(x^2-1)^2+(2x)^2}\cdot\frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2}{x^2+1}$$

(24) $$\left(\arctan\frac{1-2x-x^2}{1+2x-x^2}\right)'$$
$$= \frac{1}{1+\left(\dfrac{1-2x-x^2}{1+2x-x^2}\right)^2}\cdot\frac{(-2-2x)\cdot(1+2x-x^2)-(1-2x-x^2)\cdot(2-2x)}{(1+2x-x^2)^2}$$
$$= \frac{(1+2x-x^2)^2}{(1+2x-x^2)^2+(1-2x-x^2)^2}\cdot\frac{-4(1+x^2)}{(1+2x-x^2)^2} = \frac{-4(1+x^2)}{2(1+x^2)^2} = \frac{-2}{1+x^2}$$

(25) $\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

※ $\sqrt{x^2}=x$ とはならないことに注意する．

(26) $\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}}\cdot\left(-\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\right)$

$= -\sqrt{\dfrac{x^2+1}{(x^2+1)-1}}\cdot\dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = -\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}\cdot\dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$= -\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}\cdot\dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{|x|(x^2+1)}$

※ $\sqrt{x^2}=x$ とはならないことに注意する．

(27) $\left(\arccos\dfrac{2x}{x^2+1}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2}}\cdot\dfrac{2\cdot(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$= -\sqrt{\dfrac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2-(2x)^2}}\cdot\dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = -\dfrac{x^2+1}{\sqrt{(x^2-1)^2}}\cdot\dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)}$

※ $\sqrt{(x^2-1)^2}=x^2-1$ とはならないことに注意する．

(28) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)'$

$= \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)^2}\cdot\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\dfrac{\sin x\cdot(1+\cos x)-(1-\cos x)\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\right\}$

$= \dfrac{1+\cos x}{(1+\cos x)+(1-\cos x)}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\cdot\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

$= \dfrac{1+\cos x}{2}\cdot\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \dfrac{\sin x}{2(1+\cos x)}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

$= \dfrac{\sin x}{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2(1-\cos x)}} = \dfrac{\sin x}{2}\sqrt{\dfrac{1}{1-\cos^2 x}} = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{\sin^2 x}} = \dfrac{\sin x}{2|\sin x|}$

※ $\sqrt{\sin^2 x}=\sin x$ とはならないことに注意する．

【問題 1.7】

L'Hospital の定理を用いて，次の極限値を求めよ．ただし，不定形であることは述べなくてよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x-\arctan x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1-x}{(\arccos x)^2}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$

解答

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2} = 1$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x-\arctan x} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\dfrac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)(\sqrt{1-x^2}-1)}{\sqrt{1-x^2}\{(1+x^2)-1\}}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\{(1-x^2)-1\}}{x^2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2(1+x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)} = \frac{-1}{1\cdot(1+1)} = -\frac{1}{2}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 1-0}\frac{1-x}{(\arccos x)^2} \overset{*}{=} \lim_{x\to 1-0}\frac{-1}{2\arccos x\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)} = \lim_{x\to 1-0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\arccos x}$

$\displaystyle \overset{*}{=} \lim_{x\to 1-0}\frac{\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)} = \lim_{x\to 1-0}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

(4) $x>0$ のとき，$\arctan x > 0$ であるから

$\displaystyle \left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x = e^{\log(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x} = e^{x\log(\frac{2}{\pi}\arctan x)}$

ここで

$$\lim_{x\to\infty} x\log\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\dfrac{1}{x}} \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\frac{2}{\pi}\arctan x}\cdot\dfrac{\frac{2}{\pi}}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{(1+x^2)\arctan x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)\arctan x} = \frac{-1}{1\cdot\dfrac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

であるから,（指数関数の連続性より）

$\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log(\frac{2}{\pi}\arctan x)} = e^{-\frac{2}{\pi}}$

【問題 1.8】

次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = (\arctan x)^2$ のとき $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x)$ を簡単にせよ．

(2) $f(x) = \arcsin x \arccos x$ のとき $(1-x^2)f''(x) - xf'(x)$ を簡単にせよ．

(3) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$ のとき $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + f(x)$ を簡単にせよ．

解答

(1) $f'(x) = 2\arctan x \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$

分母をはらうと

$(1+x^2)f'(x) = 2\arctan x$

両辺を x で微分すると

$2x \cdot f'(x) + (1+x^2) \cdot f''(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

よって

$(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

※ $f'(x) = \dfrac{2\arctan x}{1+x^2}$ と $f''(x) = \dfrac{2-4x\arctan x}{(1+x^2)^2}$ を求めてから代入してもよい.

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos x + \arcsin x \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

分母をはらうと

$\sqrt{1-x^2}\, f'(x) = \arccos x - \arcsin x$

両辺を x で微分すると

$\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot f'(x) + \sqrt{1-x^2} \cdot f''(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\dfrac{-xf'(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\, f''(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

分母をはらうと

$-xf'(x) + (1-x^2)f''(x) = -2$

よって

$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = -2$

※ $f'(x) = \dfrac{\arccos x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ と $f''(x) = \dfrac{-2\sqrt{1-x^2} + x(\arccos x - \arcsin x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ を求めてから代入してもよい.

(3) $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

両辺に $1-x^2$ をかけると

$(1-x^2)f'(x) = -x\sqrt{1-x^2}\, \arcsin x + 1 - x^2$

$(1-x^2)f'(x) = -xf(x) + 1 - x^2$

両辺を x で微分すると

$-2x \cdot f'(x) + (1-x^2) \cdot f''(x) = -\{1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)\} - 2x$

よって

$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + f(x) = -2x$

※ $f'(x) = \dfrac{-x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + 1$ と $f''(x) = \dfrac{-\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ を求めてから代入してもよい.

★高次導関数

開区間 I で微分可能な関数 f の導関数 f' が再び I で微分可能なとき，$(f')'$ を f の**第 2 次導関数**といい，f'' で表す．一般に，f を n 回微分した関数を f の**第 n 次導関数**といい，$f^{(n)}$ で表す．また，$f^{(0)} = f$ と定める．そして，$f^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ がすべて I で連続であるとき，f は I で $\boldsymbol{C^n}$ **級**であるという．

例

(1) $(e^x)^{(n)} = e^x$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

(2) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

※ $(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x,\ (\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

(3) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

※ $(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x,\ (\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

(4) $\{\log(1+x)\}^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$

(5) $\{(1+x)^\alpha\}^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ $(n \in \mathbb{N})$

★Leibniz（ライプニッツ）の公式

f, g が開区間 I で n 回微分可能なとき，積 fg も I で n 回微分可能で

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad (x \in I)$$

が成り立つ．

証明

(i) $n = 1$ のとき，主張は積の微分法則に他ならないから成り立つ．

(ii) $n = m$ $(m \in \mathbb{N})$ のとき主張が成り立つと仮定する．
f, g が I で $m+1$ 回微分可能なとき，f, g は I で m 回微分可能でもあるから，帰納法の仮定より，積 fg は I で m 回微分可能で

$$\{f(x)g(x)\}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad (x \in I)$$

が成り立つ．この右辺はもう 1 回微分できるから，積 fg は I で $m+1$ 回微分可能で，$x \in I$ に対して

$$\begin{aligned}
&\{f(x)g(x)\}^{(m+1)} \\
=\ & \left\{\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m-k)}(x) g^{(k)}(x)\right\}' \\
=\ & \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k \left\{f^{(m-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(m-k)}(x) g^{(k+1)}(x)\right\} \\
=\ & \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m-k)}(x) g^{(k+1)}(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{m+1} {}_m\mathrm{C}_{k-1} f^{(m-(k-1))}(x) g^{(k)}(x) \\
&= f^{(m+1)}(x) g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m+1-k)}(x) g^{(k)}(x) \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_{k-1} f^{(m+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(0)}(x) g^{(m+1)}(x) \\
&= f^{(m+1)}(x) g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{m} ({}_m\mathrm{C}_k + {}_m\mathrm{C}_{k-1}) f^{(m+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(0)}(x) g^{(m+1)}(x) \\
&= f^{(m+1)}(x) g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{m} {}_{m+1}\mathrm{C}_k f^{(m+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(0)}(x) g^{(m+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} {}_{m+1}\mathrm{C}_k f^{(m+1-k)}(x) g^{(k)}(x)
\end{aligned}
$$

よって，$n = m+1$ のときも主張が成り立つ．

以上 (i),(ii) より，$n \in \mathbb{N}$ に対して主張が成り立つ． ∎

※対称性より

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \quad (x \in I)$$

でもよい．

【問題 1.9】

$f(x) = \arctan x$ のとき，$f^{(n)}(0)$ を求めよ．

解答

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ であるから　$(1+x^2)f'(x) = 1$

この両辺を n 回微分すると

$$\{(1+x^2)f'(x)\}^{(n)} = (1)^{(n)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (1+x^2)^{(k)} \{f'(x)\}^{(n-k)} = 0$$

$$\underbrace{1 \cdot (1+x^2) \cdot f^{(n+1)}(x)}_{k=0} + \underbrace{n \cdot 2x \cdot f^{(n)}(x)}_{k=1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} \cdot 2 \cdot f^{(n-1)}(x)}_{k=2} = 0$$

$$(1+x^2) f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1) f^{(n-1)}(x) = 0$$

$x = 0$ を代入すると

$$f^{(n+1)}(0) + n(n-1) f^{(n-1)}(0) = 0$$

であるから

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1) f^{(n-1)}(0) \quad \cdots\cdots ①$$

さて，$f^{(0)}(0)=f(0)=0,\ f^{(1)}(0)=f'(0)=1$ である．あとは，① を用いて次々と求める．

① で $n=1$ とすると　$f^{(2)}(0)=-1\cdot 0\cdot f^{(0)}(0)=-1\cdot 0\cdot 0=0$

① で $n=2$ とすると　$f^{(3)}(0)=-2\cdot 1\cdot f^{(1)}(0)=-2\cdot 1\cdot 1=-2!$

① で $n=3$ とすると　$f^{(4)}(0)=-3\cdot 2\cdot f^{(2)}(0)=-3\cdot 2\cdot 0=0$

① で $n=4$ とすると　$f^{(5)}(0)=-4\cdot 3\cdot f^{(3)}(0)=-4\cdot 3\cdot(-2!)=4!$

① で $n=5$ とすると　$f^{(6)}(0)=-5\cdot 4\cdot f^{(4)}(0)=-5\cdot 4\cdot 0=0$

① で $n=6$ とすると　$f^{(7)}(0)=-6\cdot 5\cdot f^{(5)}(0)=-6\cdot 5\cdot 4!=-6!$

同様に計算すれば

$$f^{(2n)}(0)=0,\quad f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(2n)!\quad (n=0,1,2,\ldots)$$

となることがわかる．

【問題 1.10】

$f(x)=e^x\sqrt{1-x}$ のとき，$f^{(0)}(0),f^{(1)}(0),f^{(2)}(0),f^{(3)}(0),f^{(4)}(0),f^{(5)}(0)$ を求めよ．

解答

$f^{(0)}(0)=f(0)=1$ である．また

$$f'(x)=e^x\cdot\sqrt{1-x}+e^x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{(1-2x)e^x}{2\sqrt{1-x}}\quad\cdots\cdots①$$

より $f^{(1)}(0)=f'(0)=\dfrac{1}{2}$ である．

次に，① より

$$(2-2x)f'(x)=(1-2x)f(x)$$

が成り立つことがわかるから，この両辺を n 回微分すると

$$\{(2-2x)f'(x)\}^{(n)}=\{(1-2x)f(x)\}^{(n)}$$

$$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(2-2x)^{(k)}\{f'(x)\}^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(1-2x)^{(k)}\{f(x)\}^{(n-k)}$$

$$\underbrace{1\cdot(2-2x)\cdot f^{(n+1)}(x)}_{k=0}+\underbrace{n\cdot(-2)\cdot f^{(n)}(x)}_{k=1}=\underbrace{1\cdot(1-2x)\cdot f^{(n)}(x)}_{k=0}+\underbrace{n\cdot(-2)\cdot f^{(n-1)}(x)}_{k=1}$$

$$(2-2x)f^{(n+1)}(x)-2nf^{(n)}(x)=(1-2x)f^{(n)}(x)-2nf^{(n-1)}(x)$$

$x=0$ を代入すると

$$2f^{(n+1)}(0)-2nf^{(n)}(0)=f^{(n)}(0)-2nf^{(n-1)}(0)$$

であるから

$$f^{(n+1)}(0)=\frac{1}{2}\left\{(2n+1)f^{(n)}(0)-2nf^{(n-1)}(0)\right\}\quad\cdots\cdots②$$

あとは ② を用いて次々と求める．

① で $n=1$ とすると　$f^{(2)}(0)=\dfrac{1}{2}\left(3\cdot\dfrac{1}{2}-2\cdot 1\right)=-\dfrac{1}{4}$

① で $n=2$ とすると　$f^{(3)}(0)=\dfrac{1}{2}\left\{5\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)-4\cdot\dfrac{1}{2}\right\}=-\dfrac{13}{8}$

① で $n=3$ とすると　$f^{(4)}(0)=\dfrac{1}{2}\left\{7\cdot\left(-\dfrac{13}{8}\right)-6\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right\}=-\dfrac{79}{16}$

① で $n=4$ とすると　$f^{(5)}(0)=\dfrac{1}{2}\left\{9\cdot\left(-\dfrac{79}{16}\right)-8\cdot\left(-\dfrac{13}{8}\right)\right\}=-\dfrac{503}{32}$

★Taylor（テイラー）の定理

f が開区間 I で n 回微分可能で，$a, x\in I$ $(x\neq a)$ のとき

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

をみたす θ $(0<\theta<1)$ が存在する．

※ $f(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ を**剰余項**といい，$R_n(x)$ で表す．この場合

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\quad(0<\theta<1)$$

であり，これを **Lagrange（ラグランジュ）の剰余項**という．また

$$R_n(x)=\frac{(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{(n-1)!}(x-a)^n\quad(0<\theta<1)$$

を **Cauchy の剰余項**といい，$p>0$ として

$$R_n(x)=\frac{(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n\quad(0<\theta<1)$$

を **Roche-Schlömilch（ロッシュ-シュレミルヒ）の剰余項**という．Roche-Schlömilch の剰余項において，$p=1$ のときが Cauchy の剰余項，$p=n$ のときが Lagrange の剰余項である．剰余項の形は他にもいろいろある．

定理

f が開区間 I で無限回微分可能で，$a\in I$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ をみたす $x\in I$ に対しては

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と級数で表せる．

※これを f の a を中心とする **Taylor 展開**という．特に，$a=0$ のときを **Maclaurin（マクローリン）展開**という．

★代表的な関数の Maclaurin 展開

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}+\cdots\quad(x\in\mathbb{R})$

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\dfrac{x^7}{5040}+\dfrac{x^9}{362880}-\cdots\quad(x\in\mathbb{R})$

(3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{x^8}{40320} - \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$

(4) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$

(5) $(1+x)^\alpha = 1 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \end{pmatrix} x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$

ただし，$\alpha \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$ とし，

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

は一般二項係数である．

(6) $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{5}{128}x^4 + \dfrac{7}{256}x^5 - \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{5}{16}x^3 + \dfrac{35}{128}x^4 - \dfrac{63}{256}x^5 + \cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$

(8) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$

(9) $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^9}{9} - \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

(10) $\arcsin x = x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + \dfrac{5}{112}x^7 + \dfrac{35}{1152}x^9 + \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

【問題 1.11】

次の関数の Maclaurin 展開の 4 次以下の項を求めよ．ただし，係数は既約分数にすること．また，展開できる範囲は述べなくてよい．

(1) e^{-3x}

(2) $\sin 5x - \cos 2x$

(3) $(1 + 2x - 3x^2 + x^3)\arctan x$

(4) $\dfrac{\arcsin x}{1+x}$

(5) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$

(6) $e^x\sqrt{1-x}$

(7) $\sqrt{1+x+x^2}$

(8) $\log\left(1 + x - \dfrac{x^2}{3}\right)$

解答

(1) e^x の Maclaurin 展開の式において x を $-3x$ におきかえる．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$\begin{aligned} e^{-3x} &= 1 + (-3x) + \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-3x)^3}{6} + \frac{(-3x)^4}{24} + \cdots \\ &= 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 - \cdots \end{aligned}$$

(2) $\sin x,\ \cos x$ の Maclaurin 展開の式において x をそれぞれ $5x,\ 2x$ におきかえる．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$\begin{aligned}
\sin 5x - \cos 2x &= \left\{5x - \frac{(5x)^3}{6} + \cdots\right\} - \left\{1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} - \cdots\right\} \\
&= \left(5x - \frac{125}{6}x^3 + \cdots\right) - \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \cdots\right) \\
&= -1 + 5x + 2x^2 - \frac{125}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + \cdots
\end{aligned}$$

(3) $\arctan x$ の Maclaurin 展開の式に $1+2x-3x^2+x^3$ をかける．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$\begin{aligned}
(1+2x-3x^2+x^3)\arctan x &= (1+2x-3x^2+x^3)\left(x - \frac{x^3}{3} + \cdots\right) \\
&= \begin{array}{cccccccc}
x & & & - & \frac{1}{3}x^3 & & & + \cdots \\
 & + & 2x^2 & & & - & \frac{2}{3}x^4 & + \cdots \\
 & & & - & 3x^3 & & & + \cdots \\
 & & & & & + & x^4 & + \cdots
\end{array} \\
&= x + 2x^2 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \cdots
\end{aligned}$$

(4) $\arcsin x$ と $\dfrac{1}{1+x}$ の Maclaurin 展開の式をかける．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$\begin{aligned}
\frac{\arcsin x}{1+x} &= \left(x + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots) \\
&= \begin{array}{ccccccccc}
x & - & x^2 & + & x^3 & - & x^4 & + & \cdots \\
 & & & + & \frac{1}{6}x^3 & - & \frac{1}{6}x^4 & + & \cdots
\end{array} \\
&= x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 - \frac{7}{6}x^4 + \cdots
\end{aligned}$$

(5) $\cos x$ と $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ の Maclaurin 展開の式をかける．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{\sqrt{1+x}} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots\right)\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \cdots\right) \\
&= \begin{array}{ccccccccccc}
1 & - & \frac{1}{2}x & + & \frac{3}{8}x^2 & - & \frac{5}{16}x^3 & + & \frac{35}{128}x^4 & + & \cdots \\
 & & & - & \frac{1}{2}x^2 & + & \frac{1}{4}x^3 & - & \frac{3}{16}x^4 & + & \cdots \\
 & & & & & & & + & \frac{1}{24}x^4 & + & \cdots
\end{array} \\
&= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{49}{384}x^4 + \cdots
\end{aligned}$$

(6) e^x の Maclaurin 展開の式と，$\sqrt{1+x}$ の Maclaurin 展開の式において x を $-x$ におきかえた式をかける．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$
\begin{aligned}
e^x\sqrt{1-x} &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\cdots\right)\\
&= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots\\
&\qquad + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \cdots\\
&\qquad + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \cdots\\
&\qquad + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \cdots\\
&\qquad + \frac{1}{24}x^4 + \cdots\\
&= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{13}{48}x^3-\frac{79}{384}x^4+\cdots
\end{aligned}
$$

(7) $\sqrt{1+x}$ の Maclaurin 展開の式において x を $x+x^2$ におきかえる．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+x+x^2} &= 1+\frac{1}{2}(x+x^2)-\frac{1}{8}(x+x^2)^2+\frac{1}{16}(x+x^2)^3-\frac{5}{128}(x+x^2)^4+\cdots\\
&= 1+\frac{1}{2}(x+x^2)-\frac{1}{8}(x^2+2x^3+x^4)+\frac{1}{16}(x^3+3x^4+\cdots)\\
&\qquad -\frac{5}{128}(x^4+\cdots)+\cdots\\
&= 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^3+\frac{3}{16}x^4-\frac{5}{128}x^4+\cdots\\
&= 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{16}x^3+\frac{3}{128}x^4+\cdots
\end{aligned}
$$

(8) $\log(1+x)$ の Maclaurin 展開の式において x を $x-\dfrac{x^2}{3}$ におきかえる．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$
\begin{aligned}
\log\left(1+x-\frac{x^2}{3}\right) &= \left(x-\frac{x^2}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^2}{3}\right)^3-\frac{1}{4}\left(x-\frac{x^2}{3}\right)^4+\cdots\\
&= \left(x-\frac{1}{3}x^2\right)-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{9}x^4\right)+\frac{1}{3}(x^3-x^4+\cdots)\\
&\qquad -\frac{1}{4}(x^4+\cdots)+\cdots\\
&= x-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{18}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{4}x^4+\cdots\\
&= x-\frac{5}{6}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{23}{36}x^4+\cdots
\end{aligned}
$$

§2.　1 変数関数の積分

★原始関数

区間 I で定義された関数 $f(x)$ に対して，I で $F'(x)=f(x)$ をみたす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という．そして，$f(x)$ の原始関数（全体）を

$$\int f(x)dx$$

で表す．

※ $F_1(x)$ と $F_2(x)$ を $f(x)$ の原始関数とするとき，I で

$$\{F_1(x)-F_2(x)\}'={F_1}'(x)-{F_2}'(x)=f(x)-f(x)=0$$

が成り立つから，平均値の定理より，$F_1(x)-F_2(x)$ は I で定数である．よって，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数のひとつとするとき，任意の原始関数は定数 C を用いて

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

で与えられる．この定数 C を**積分定数**という．積分計算だけのときは，積分定数を省略することがある．

★代表的な原始関数

(1) $\displaystyle\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\quad(\alpha\neq-1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx=\log|x|$

(3) $\displaystyle\int e^x dx=e^x$

(4) $\displaystyle\int \sin x dx=-\cos x$

(5) $\displaystyle\int \cos x dx=\sin x$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\tan x}$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

※定数 $A\ (\neq 0)$, B に対して

$$\int e^{Ax+B}dx=\frac{1}{A}e^{Ax+B}$$

$$\int \sin(Ax+B)dx=-\frac{1}{A}\cos(Ax+B)$$

などが成り立つ（他も同様）．

【問題 2.1】
次を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\left(x^4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx$

(2) $\displaystyle\int\left(3-\frac{5}{x}\right)\left(4x^2-1-\frac{2}{x}\right)dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{(x-1)^2(3x-1)}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int e^{4x-5}dx$

(5) $\displaystyle\int\frac{(e^{3x}-4)^2}{e^{4x}}dx$

(6) $\displaystyle\int(2\sin 3x+5\cos 2x)dx$

(7) $\displaystyle\int\cos^2 x dx$

(8) $\displaystyle\int\sin^4 x dx$

(9) $\displaystyle\int\cos 4x\cos x dx$

(10) $\displaystyle\int\sin 6x\sin 3x dx$

(11) $\displaystyle\int(2\sin 6x-3\cos 2x)^2dx$

(12) $\displaystyle\int(2\cos 7x-5\sin 3x)^2dx$

ヒント

(7) 2 倍角の公式 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ から得られる

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}\quad\cdots\cdots①$$

を用いる．

(8) $\sin^4 x=(\sin^2 x)^2$ であることと，2 倍角の公式 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ から得られる

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}\quad\cdots\cdots②$$

を用い，さらに ① も用いる．

(9) 積和の公式を用いる．積和の公式を覚えていない場合は，加法定理

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\quad\cdots\cdots③$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\quad\cdots\cdots④$$

を辺々加えて

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

と導けばよい．

(10) 積和の公式を用いる．積和の公式を覚えていない場合は，③ − ④ より

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

と導けばよい．

(11) 被積分関数を展開し，$\sin^2 6x$，$\cos^2 2x$ の部分はそれぞれ ②, ① を用い，$\sin 6x\cos 2x$ の部分は積和の公式を用いる．積和の公式を覚えていない場合は，加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\quad\cdots\cdots⑤$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ⑥$$

を辺々加えて

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

と導けばよい．

(12) 積和の公式を覚えていない場合は，⑤ − ⑥ より

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

と導けばよい．

解答

(1) $\displaystyle\int\left(x^4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx=\frac{1}{5}x^5-2\log|x|-\frac{3}{x}$

※ $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}=-x^{-1}=-\frac{1}{x}$ （これは公式としたい）

(2) $$\begin{aligned}\int\left(3-\frac{5}{x}\right)\left(4x^2-1-\frac{2}{x}\right)dx &= \int\left(12x^2-20x-3-\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}\right)dx\\ &= 4x^3-10x^2-3x-\log|x|-\frac{10}{x}\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\int\frac{(x-1)^2(3x-1)}{x^2}dx &= \int\left(3x-7+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx\\ &= \frac{3}{2}x^2-7x+5\log|x|+\frac{1}{x}\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int e^{4x-5}dx=\frac{1}{4}e^{4x-5}$

(5) $$\begin{aligned}\int\frac{(e^{3x}-4)^2}{e^{4x}}dx &= \int\frac{e^{6x}-8e^{3x}+16}{e^{4x}}dx\\ &= \int(e^{2x}-8e^{-x}+16e^{-4x})dx\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}+8e^{-x}-4e^{-4x}\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\int(2\sin 3x+5\cos 2x)dx=-\frac{2}{3}\cos 3x+\frac{5}{2}\sin 2x$

(7) $\displaystyle\int\cos^2 x dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$

(8) $$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx \\ &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \int \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} dx \\ &= \int \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{4}\left\{x-\sin 2x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right) \\ &= \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\end{aligned}$$

(9) $$\begin{aligned}\int \cos 4x \cos x dx &= \int \frac{1}{2}(\cos 5x+\cos 3x) dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{3}\sin 3x\right) \\ &= \frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{6}\sin 3x\end{aligned}$$

(10) $$\begin{aligned}\int \sin 6x \sin 3x dx &= \int -\frac{1}{2}(\cos 9x-\cos 3x) dx \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\sin 9x-\frac{1}{3}\sin 3x\right) \\ &= -\frac{1}{18}\sin 9x+\frac{1}{6}\sin 3x\end{aligned}$$

(11) $\displaystyle\int (2\sin 6x-3\cos 2x)^2 dx$

$$\begin{aligned}&= \int (4\sin^2 6x-12\sin 6x\cos 2x+9\cos^2 2x) dx \\ &= \int \left\{4\cdot\frac{1-\cos 12x}{2}-12\cdot\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 4x)+9\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}\right\} dx \\ &= 2\left(x-\frac{1}{12}\sin 12x\right)-6\left(-\frac{1}{8}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 4x\right)+\frac{9}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right) \\ &= \frac{13}{2}x-\frac{1}{6}\sin 12x+\frac{3}{4}\cos 8x+\frac{3}{2}\cos 4x+\frac{9}{8}\sin 4x\end{aligned}$$

(12) $\displaystyle\int(2\cos 7x-5\sin 3x)^2dx$

$$=\int(4\cos^2 7x-20\cos 7x\sin 3x+25\sin^2 3x)dx$$
$$=\int\left\{4\cdot\frac{1+\cos 14x}{2}-20\cdot\frac{1}{2}(\sin 10x-\sin 4x)+25\cdot\frac{1-\cos 6x}{2}\right\}dx$$
$$=2\left(x+\frac{1}{14}\sin 14x\right)-10\left(-\frac{1}{10}\cos 10x+\frac{1}{4}\cos 4x\right)+\frac{25}{2}\left(x-\frac{1}{6}\sin 6x\right)$$
$$=\frac{29}{2}x+\frac{1}{7}\sin 14x+\cos 10x-\frac{5}{2}\cos 4x-\frac{25}{12}\sin 6x$$

★プチ置換

$f(x)$ を区間 I で微分可能な関数とする．このとき，I で

$$\{\log|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$\left\{\frac{1}{\alpha+1}f(x)^{\alpha+1}\right\}'=f(x)^{\alpha}\cdot f'(x)\quad(\alpha\neq-1)$$

をみたすから，次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|$

分数のときは，まずは分母の微分を考える．そして，分母の微分が分子にあればプチ置換 (1) で計算．

(2) $\displaystyle\int f(x)^{\alpha}\cdot f'(x)dx=\frac{1}{\alpha+1}f(x)^{\alpha+1}\quad(\alpha\neq-1)$

ルートやべき乗があるときは，まずはルートやべき乗の中の微分を考える．そして，ルートやべき乗の中の微分が外にあればプチ置換 (2) で計算．

※ $\log x$ と $\dfrac{1}{x}$ があるときは，$\dfrac{1}{x}$ を $(\log x)'$ とみてプチ置換で計算するとよい．

【例題】

(1) $\displaystyle\int\frac{5x}{3x^2-1}dx=\frac{5}{6}\int\frac{6x}{3x^2-1}dx=\frac{5}{6}\log|3x^2-1|$

※「分数であるから，まずは分母の $3x^2-1$ を微分してみるかな．

$$(3x^2-1)'=6x$$

これは分子の $5x$ ではないけど，係数を修正すれば分子になるから，プチ置換 (1) だ」と考えて計算している．分数ならいつでもプチ置換 (1) が使えるとは限らないが，分数のときはプチ置換 (1) が使えるかどうかを試してみよう．

(2) $\displaystyle\int\tan 2x dx=\int\frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx=\frac{1}{-2}\int\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}dx=-\frac{1}{2}\log|\cos 2x|$

※「$\tan 2x$ は分数ではないけど，$\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$ にすれば分数だ．そして，分母の微分は

$(\cos 2x)' = -2\sin 2x$ で，係数を修正すれば分子になるから，プチ置換 (1) だ」と考えて計算している．

(3) $\displaystyle\int \sin^6 x \cdot \cos x dx = \frac{1}{7}\sin^7 x$

※「$\sin^6 x = (\sin x)^6$ はべき乗で，中の微分は $(\sin x)' = \cos x$ で外にあるから，プチ置換 (2) だ」と考えて計算している．

(4)
$$\begin{aligned}\int \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2-x+7}}dx &= -\int (x^2-x+7)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x-1)dx \\ &= -2(x^2-x+7)^{\frac{1}{2}} \\ &= -2\sqrt{x^2-x+7}\end{aligned}$$

※「ルートがあって，ルートの中の微分は $(x^2-x+7)' = 2x-1$ で，係数を修正すれば外にあるから，プチ置換 (2) だ」と考えて計算している．

(5)
$$\begin{aligned}\int \sin^3 x &= \int \sin^2 x \sin x dx \\ &= \int (1-\cos^2 x)\sin x dx \\ &= \int (\sin x - \cos^2 x \sin x)dx \\ &= \int \{\sin x + \cos^2 x \cdot (-\sin x)\}dx \\ &= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\end{aligned}$$

【問題 2.2】

次を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x+1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{-\cos x}{3\sin x+2}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{4\sin 3x}{6\cos 3x-5}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log 2x}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}dx$

(7) $\displaystyle\int e^{2x}(e^{2x}-1)^2dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{(\log x)^4}{x}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(\cos x+2)^3}dx$

(11) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$

(12) $\displaystyle\int x\sqrt{4x^2-3}\,dx$

(13) $\displaystyle\int x\sqrt{(1-x^2)^5}\,dx$

(14) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx$

(15) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}dx$　　(16) $\displaystyle\int \cos^5 x dx$

(17) $\displaystyle\int (2\sin^2 x + 5\sin^4 x)\cos^3 x dx$　　(18) $\displaystyle\int \frac{1+2x}{1+x^2}dx$

(19) $\displaystyle\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　(20) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx$

解答

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x+1}dx = \log|x^2+4x+1|$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = \frac{1}{2}\log(e^{2x}+1)$

(3) $\displaystyle\int \frac{-\cos x}{3\sin x+2}dx = \frac{-1}{3}\int \frac{3\cos x}{3\sin x+2}dx = -\frac{1}{3}\log|3\sin x+2|$

(4) $\displaystyle\int \frac{4\sin 3x}{6\cos 3x-5}dx = \frac{4}{-18}\int \frac{-18\sin 3x}{6\cos 3x-5}dx = -\frac{2}{9}\log|6\cos 3x-5|$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log 2x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\log 2x}dx = \log|\log 2x|$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \log|\sin x|$

(7) $\displaystyle\int e^{2x}(e^{2x}-1)^2 dx = \frac{1}{2}\int (e^{2x}-1)^2\cdot 2e^{2x}dx = \frac{1}{6}(e^{2x}-1)^3$

(8) $\displaystyle\int \frac{(\log x)^4}{x}dx = \int (\log x)^4\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{5}(\log x)^5$

(9) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx = \int (\sin x)^{-5}\cdot\cos x dx = \frac{1}{-4}(\sin x)^{-4} = -\frac{1}{4\sin^4 x}$

(10) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(\cos x+2)^3}dx = -\int (\cos x+2)^{-3}\cdot(-\sin x)dx = -\frac{1}{-2}(\cos x+2)^{-2} = \frac{1}{2(\cos x+2)^2}$

(11) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+5)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3}$

(12) $\displaystyle\int x\sqrt{4x^2-3}\,dx = \frac{1}{8}\int (4x^2-3)^{\frac{1}{2}}\cdot 8x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(4x^2-3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{12}\sqrt{(4x^2-3)^3}$

(13) $\displaystyle\int x\sqrt{(1-x^2)^5}\,dx = \frac{1}{-2}\int (1-x^2)^{\frac{5}{2}}\cdot(-2x)dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}(1-x^2)^{\frac{7}{2}} = -\frac{1}{7}\sqrt{(1-x^2)^7}$

(14) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x dx = \frac{1}{2}\cdot 2(x^2+3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+3}$

(15) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}dx = \frac{1}{-6}\int (1-3x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-6x)dx = -\frac{1}{6}\cdot 2(1-3x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{1-3x^2}$

(16)
$$\begin{aligned}\int \cos^5 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 \cos x dx \\ &= \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx \\ &= \int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\cos x dx \\ &= \int (\cos x - 2\sin^2 x\cdot\cos x + \sin^4 x\cdot\cos x)dx \\ &= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x\end{aligned}$$

(17)
$$\begin{aligned}\int (2\sin^2 x + 5\sin^4 x)\cos^3 x dx &= \int (2\sin^2 x+5\sin^4 x)(1-\sin^2 x)\cos x dx \\ &= \int (2\sin^2 x + 3\sin^4 x - 5\sin^6 x)\cos x dx \\ &= \int (2\sin^2 x\cdot\cos x + 3\sin^4 x\cdot\cos x - 5\sin^6 x\cdot\cos x)dx \\ &= \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{5}{7}\sin^7 x\end{aligned}$$

(18) $\displaystyle\int \frac{1+2x}{1+x^2}dx = \int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}\right)dx = \arctan x + \log(1+x^2)$

(19)
$$\begin{aligned}\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx \\ &= \int\left\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\right\}dx \\ &= \arcsin x + 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(20)\quad \int \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx &= \int \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx \\
&= \int \frac{\sin x}{(2-\cos x)(2+\cos x)}dx \\
&= \int \frac{1}{4}\left(\frac{\sin x}{2-\cos x}+\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)dx \\
&= \int \frac{1}{4}\left(\frac{\sin x}{2-\cos x}-\frac{-\sin x}{2+\cos x}\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\{\log(2-\cos x)-\log(2+\cos x)\} \\
&= \frac{1}{4}\log\frac{2-\cos x}{2+\cos x}
\end{aligned}
$$

★部分積分

$f(x), g(x)$ を区間 I で微分可能な関数とする．このとき，I で

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

をみたすから，次が成り立つ．

$$\int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx = f(x)g(x)$$

よって，$f'(x)g(x)$ の原始関数が求められるときは，

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

により $f(x)g'(x)$ の原始関数が求められる．

$$
\begin{tikzcd}
f(x) \arrow[dr] & g(x) \arrow[dl] \\
f'(x) & g'(x)
\end{tikzcd}
$$

☆部分積分のやり方

基本的に，被積分関数が積の形のときに用いる．

(1) 被積分関数を「左上」と「右下」に配置する．

まずはやってみる．うまくいかなければ逆配置．経験をつむと，配置の仕方がわかってくる．

・$x^{\bullet}$ は「左上」に置くとよさそう.（準正解）

・「右下」には，原始関数が（簡単に）求まるものしか置けない.（正解）　→ log は「左上」?

(2) 「左下」と「右上」を埋める．

(3) 矢印の通りに部分積分を実行する．

※特殊形

(1) 「右下」を 1 として部分積分する．

(2) 左辺と同じ積分が右辺にも現れた場合，最後は方程式を解くようにして求める．

※テクニック

「左下」をみてから「右上」を定数で修正する．

【例題】

(1) $\displaystyle\int xe^{5x}dx$

ステップ 1：被積分関数を「左上」と「右下」に配置する．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr] & \\ & e^{5x} \end{tikzcd}$$

←この矢印が左辺

ステップ 2：「左下」と「右上」を埋める．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dash] & \frac{1}{5}e^{5x} \arrow[dl] \\ 1 & e^{5x} \end{tikzcd}$$

←この矢印が右辺
「横はかけるだけ」
「斜めはかけて積分」を引く

ステップ 3：矢印の通りに部分積分を実行する．

$$\begin{aligned} \int xe^{5x}dx &= \underbrace{\frac{1}{5}xe^{5x}}_{\text{横}} - \underbrace{\frac{1}{5}\int e^{5x}dx}_{\text{斜め}} \\ &= \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \int x\sin 3x dx &= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x dx \\ &= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dash] \arrow[dr] & -\frac{1}{3}\cos 3x \arrow[dl] \\ 1 & \sin 3x \end{tikzcd}$$

(3)
$$\begin{aligned} \int x^2\sin x dx &= -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx \\ &= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x dx\right) \\ &= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} x^2 \arrow[r, dash] \arrow[dr] & -\cos x \arrow[dl] \\ 2x & \sin x \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dash] \arrow[dr] & \sin x \arrow[dl] \\ 1 & \cos x \end{tikzcd}$$

※2 回部分積分をやらなければいけないこともある．

(4)
$$\begin{aligned} \int \log(x-3)dx &= (x-3)\log(x-3) - \int dx \\ &= (x-3)\log(x-3) - x \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \log(x-3) \arrow[r, dash] \arrow[dr] & x-3 \arrow[dl] \\ \frac{1}{x-3} & 1 \end{tikzcd}$$

※特殊形 (1)：「右下」を 1 として部分積分する．
テクニック：「左下」の形を見て，「右上」を定数で修正する．

(5)
$$
\begin{aligned}
\int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \\
&= -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x dx}_{\text{移項}} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
e^x & & -\cos x \\
e^x & & \sin x
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
e^x & & \sin x \\
e^x & & \cos x
\end{array}
$$

であるから

$$2 \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

よって

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} \left(-e^x \cos x + e^x \sin x \right)$$

※特殊形 (2)：左辺と同じ積分が右辺にも現れるときがある．

【問題 2.3】
次を求めよ．

(1) $\displaystyle\int xe^{4x} dx$

(2) $\displaystyle\int xe^{\frac{x}{3}} dx$

(3) $\displaystyle\int x^2 e^{-x} dx$

(4) $\displaystyle\int x \cos 2x dx$

(5) $\displaystyle\int x^2 \cos x dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{\log 4x}{x^2} dx$

(7) $\displaystyle\int x^2 \log x dx$

(8) $\displaystyle\int (\log x)^2 dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

(10) $\displaystyle\int \arctan x dx$

(11) $\displaystyle\int \arcsin x dx$

(12) $\displaystyle\int 2x \arctan x dx$

(13) $\displaystyle\int 2x (\arctan x)^2 dx$

(14) $\displaystyle\int (3x - \sin x)^2 dx$

(15) $\displaystyle\int e^{2x} \cos x dx$

(16) $\displaystyle\int e^{-3x} \sin 2x dx$

解答

(1)
$$
\begin{aligned}
\int xe^{4x} dx &= \frac{1}{4} xe^{4x} - \frac{1}{4} \int e^{4x} dx \\
&= \frac{1}{4} xe^{4x} - \frac{1}{16} e^{4x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
x & & \frac{1}{4} e^{4x} \\
1 & & e^{4x}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\quad \int xe^{\frac{x}{3}}dx &= 3xe^{\frac{x}{3}} - 3\int e^{\frac{x}{3}}dx \\
&= 3xe^{\frac{x}{3}} - 9e^{\frac{x}{3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cc}
x & 3e^{\frac{x}{3}} \\
1 & e^{\frac{x}{3}}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\quad \int x^2e^{-x}dx &= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx \\
&= -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) \\
&= -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) \\
&= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cc}
x^2 & -e^{-x} \\
2x & e^{-x}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
x & -e^{-x} \\
1 & e^{-x}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(4)\quad \int x\cos 2x dx &= \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx \\
&= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cc}
x & \frac{1}{2}\sin 2x \\
1 & \cos 2x
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(5)\quad \int x^2\cos x dx &= x^2\sin x - 2\int x\sin x dx \\
&= x^2\sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x dx\right) \\
&= x^2\sin x - 2(-x\cos x + \sin x) \\
&= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cc}
x^2 & \sin x \\
2x & \cos x
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
x & -\cos x \\
1 & \sin x
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(6)\quad \int \frac{\log 4x}{x^2}dx &= -\frac{\log 4x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx \\
&= -\frac{\log 4x}{x} - \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\log 4x & -\frac{1}{x} \\
\frac{1}{x} & \frac{1}{x^2}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(7)\quad \int x^2\log x dx &= \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{3}\int x^2 dx \\
&= \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{9}x^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\log x & \frac{1}{3}x^3 \\
\frac{1}{x} & x^2
\end{array}
$$

(8)
$$\begin{aligned}
\int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - 2\int \log x dx \\
&= x(\log x)^2 - 2\left(x\log x - \int dx\right) \\
&= x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) \\
&= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
(\log x)^2 & & x \\
2\log x \cdot \dfrac{1}{x} & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\log x & & x \\
\dfrac{1}{x} & & 1
\end{array}$$

(9)
$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= x\tan x - \int \tan x dx \\
&= x\tan x + \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \\
&= x\tan x + \log|\cos x|
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
x & & \tan x \\
1 & & \dfrac{1}{\cos^2 x}
\end{array}$$

(10)
$$\begin{aligned}
\int \arctan x dx &= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\
&= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx \\
&= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
\arctan x & & x \\
\dfrac{1}{1+x^2} & & 1
\end{array}$$

(11)
$$\begin{aligned}
\int \arcsin x dx &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) dx \\
&= x\arcsin x + \frac{1}{2} \cdot 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
\arcsin x & & x \\
\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & & 1
\end{array}$$

(12)
$$\begin{aligned}
\int 2x\arctan x dx &= (x^2+1)\arctan x - \int dx \\
&= (x^2+1)\arctan x - x
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
\arctan x & & x^2+1 \\
\dfrac{1}{1+x^2} & & 2x
\end{array}$$

(13) $\displaystyle\int 2x(\arctan x)^2 dx$

$$
\begin{tikzcd}
(\arctan x)^2 \arrow[r, dash] \arrow[dr] & x^2+1 \arrow[dl] \\
2\arctan x\cdot\dfrac{1}{1+x^2} & 2x
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (x^2+1)(\arctan x)^2 - 2\int \arctan x dx \\
&= (x^2+1)(\arctan x)^2 - 2\left\{x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right\} \\
&= (x^2+1)(\arctan x)^2 - 2x\arctan x + \log(1+x^2)
\end{aligned}
$$

(14) $\displaystyle\int (3x-\sin x)^2 dx$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, dash] \arrow[dr] & -\cos x \arrow[dl] \\
1 & \sin x
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int (9x^2 - 6x\sin x + \sin^2 x)dx \\
&= 3x^3 - 6\left(-x\cos x + \int \cos x dx\right) + \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx \\
&= 3x^3 - 6(-x\cos x + \sin x) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) \\
&= 3x^3 + \frac{1}{2}x + 6x\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x - 6\sin x
\end{aligned}
$$

(15) $\displaystyle\int e^{2x}\cos x dx$

$$
\begin{tikzcd}
e^{2x} \arrow[r, dash] \arrow[dr] & \sin x \arrow[dl] \\
2e^{2x} & \cos x
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e^{2x} \arrow[r, dash] \arrow[dr] & -\cos x \arrow[dl] \\
2e^{2x} & \sin x
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x dx \\
&= e^{2x}\sin x - 2\left(-e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x dx\right) \\
&= e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - \underbrace{4\int e^{2x}\cos x dx}_{\text{移項}}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\int e^{2x}\cos x dx &= \frac{1}{5}\left(e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x\right) \\
&= \frac{1}{5}e^{2x}\sin x + \frac{2}{5}e^{2x}\cos x
\end{aligned}
$$

(16) $\displaystyle\int e^{-3x}\sin 2x dx$

$$\begin{array}{ccc} e^{-3x} & & -\dfrac{1}{2}\cos 2x \\ -3e^{-3x} & & \sin 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} e^{-3x} & & \dfrac{1}{2}\sin 2x \\ -3e^{-3x} & & \cos 2x \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}e^{-3x}\cos 2x - \frac{3}{2}\int e^{-3x}\cos 2x dx \\
&= -\frac{1}{2}e^{-3x}\cos 2x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{-3x}\sin 2x + \frac{3}{2}\int e^{-3x}\sin 2x dx\right) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-3x}\cos 2x - \frac{3}{4}e^{-3x}\sin 2x - \underbrace{\frac{9}{4}\int e^{-3x}\sin 2x dx}_{\text{移項}}
\end{aligned}$$

であるから

$$\frac{13}{4}\int e^{-3x}\sin 2x dx = -\frac{1}{2}e^{-3x}\cos 2x - \frac{3}{4}e^{-3x}\sin 2x$$

よって

$$\begin{aligned}
\int e^{-3x}\sin 2x dx &= \frac{4}{13}\left(-\frac{1}{2}e^{-3x}\cos 2x - \frac{3}{4}e^{-3x}\sin 2x\right) \\
&= -\frac{2}{13}e^{-3x}\cos 2x - \frac{3}{13}e^{-3x}\sin 2x
\end{aligned}$$

★有理関数の積分

分母を実数の範囲で因数分解し，その形から部分分数に分解してそれぞれを積分する．

$$\int \frac{1}{a^2+(x+b)^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x+b}{a} \quad (a \neq 0)$$

は公式としてよい（左辺において $x+b=at$ と置換するか，右辺を微分することにより示せる）．

【例題】

$\displaystyle\int \frac{x^2-7x-1}{(x-2)(x^2+2x+3)}dx$ を求めよ．

解答

$$\frac{x^2-7x-1}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}$$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$x^2-7x-1 = A(x^2+2x+3)+(Bx+C)(x-2) \quad \cdots (*)$

$x=2$ を代入　　$-11 = 11A \qquad \therefore \quad A=-1$

$x=0$ を代入　　$-1 = 3A-2C$

　　　　　　　　$-1 = -3-2C \qquad \therefore \quad C=-1$

$x=1$ を代入　　$-7 = 6A-(B+C)$

　　　　　　　　$-7 = -6-B+1 \qquad \therefore \quad B=2$

よって，プチ置換 (1) と上の公式を用いると

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-7x-1}{(x-2)(x^2+2x+3)}dx &= \int \left(-\frac{1}{x-2}+\frac{2x-1}{x^2+2x+3}\right)dx \\
&= \int \left\{-\frac{1}{x-2}+\frac{(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\right\}dx \\
&= \int \left\{-\frac{1}{x-2}+\frac{2x+2}{x^2+2x+3}-\frac{3}{(\sqrt{2})^2+(x+1)^2}\right\}dx \\
&= -\log|x-2|+\log(x^2+2x+3)-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

※ A, B, C を求めるとき，$(*)$ の右辺を展開して

$x^2-7x-1=(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+(3A-2C)$

としてから係数比較して，連立方程式

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-2B+C=-7 \\ 3A-2C=-1 \end{cases}$$

を解いてもよい．

【問題 2.4】

次を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{14x+18}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(x-1)}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{5x^2-2x+2}{(x+1)(x^2-x+1)}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^2-x-11}{(x-3)(x^2-2x+2)}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{-10x^2+5x+48}{(x-2)(x-3)(x^2+4x+6)}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{7x^2+12x+65}{(x+1)(x-2)(x^2+2x+5)}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{8x^2-16x+15}{x^2(x^2-2x+5)}dx$

ヒント

分解の形は次のようになる．

(1) $\displaystyle\frac{14x+18}{(x+1)(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}$

(2) $\displaystyle\frac{1}{x^3(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}$

(3) $\displaystyle\frac{5x^2-2x+2}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

(4) $\displaystyle\frac{x^2-x-11}{(x-3)(x^2-2x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$

(5) $\dfrac{x^2+x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+2}$

(6) $\dfrac{-10x^2+5x+48}{(x-2)(x-3)(x^2+4x+6)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4x+6}$

(7) $\dfrac{7x^2+12x+65}{(x+1)(x-2)(x^2+2x+5)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+5}$

(8) $\dfrac{8x^2-16x+15}{x^2(x^2-2x+5)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-2x+5}$

解答

(1) $\dfrac{14x+18}{(x+1)(x+2)(x-3)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x-3}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$14x+18=A(x+2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x+2)$

$x=-1$ を代入　　$4=-4A$　　$\therefore\quad A=-1$

$x=-2$ を代入　　$-10=5B$　　$\therefore\quad B=-2$

$x=3$ を代入　　$60=20C$　　$\therefore\quad C=3$

よって

$$\begin{aligned}\int\frac{14x+18}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx &= \int\left(-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-3}\right)dx\\ &= -\log|x+1|-2\log|x+2|+3\log|x-3|\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{1}{x^3(x-1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}+\dfrac{D}{x-1}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$1=Ax^2(x-1)+Bx(x-1)+C(x-1)+Dx^3$

$x=0$ を代入　　$1=-C$　　$\therefore\quad C=-1$

$x=1$ を代入　　$1=D$

$x=-1$ を代入　　$1=-2A+2B-2C-D$

$1=-2A+2B+2-1$　　$\therefore\quad A=B$

$x=2$ を代入　　$1=4A+2B+C+8D$

$1=4A+2A-1+8$　　$\therefore\quad A=-1,\ B=-1$

よって

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^3(x-1)}dx &= \int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x-1}\right)dx\\ &= -\log|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\log|x-1|\end{aligned}$$

※C, D を求めた後，次のように A, B を求めてもよい．

x^3 の係数比較　　$0=A+D \quad \therefore \quad A=-D=-1$

x の係数比較　　$0=-B+C \quad \therefore \quad B=C=-1$

数値代入だけでなく，係数比較も用いるなどして，臨機応変に求めるとよい．

(3) $\dfrac{5x^2-2x+2}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$5x^2-2x+2=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$

$x=-1$ を代入　　$9=3A \quad \therefore \quad A=3$

$x=0$ を代入　　$2=A+C$

$\qquad\qquad\qquad 2=3+C \quad \therefore \quad C=-1$

$x=1$ を代入　　$5=A+2(B+C)$

$\qquad\qquad\qquad 5=3+2B-2 \quad \therefore \quad B=2$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2-2x+2}{(x+1)(x^2-x+1)}dx &= \int \left(\frac{3}{x+1}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx \\ &= 3\log|x+1|+\log(x^2-x+1)\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{x^2-x-11}{(x-3)(x^2-2x+2)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{Bx+C}{x^2-2x+2}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$x=3$ を代入　　$-5=5A \quad \therefore \quad A=-1$

$x=0$ を代入　　$-11=2A-3C$

$\qquad\qquad\qquad -11=-2-3C \quad \therefore \quad C=3$

$x=1$ を代入　　$-11=A-2(B+C)$

$\qquad\qquad\qquad -11=-1-2B-6 \quad \therefore \quad B=2$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-x-11}{(x-3)(x^2-2x+2)}dx &= \int \left(-\frac{1}{x-3}+\frac{2x+3}{x^2-2x+2}\right)dx \\ &= \int \left\{-\frac{1}{x-3}+\frac{(2x-2)+5}{x^2-2x+2}\right\}dx \\ &= \int \left\{-\frac{1}{x-3}+\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{5}{1+(x-1)^2}\right\}dx \\ &= -\log|x-3|+\log(x^2-2x+2)+5\arctan(x-1)\end{aligned}$$

(5) $\dfrac{x^2+x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+2}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$x^2+x+3=A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x+1)$

$x=-1$ を代入　　$3=A$

$x=0$ を代入　　$3=2A+C$

　　　　　　　　$3=6+C \qquad \therefore \quad C=-3$

$x=1$ を代入　　$5=5A+2(B+C)$

　　　　　　　　$5=15+2B-6 \qquad \therefore \quad B=-2$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx &= \int \left(\frac{3}{x+1}+\frac{-2x-3}{x^2+2x+2}\right)dx \\
&= \int \left\{\frac{3}{x+1}+\frac{-(2x+2)-1}{x^2+2x+2}\right\}dx \\
&= \int \left\{\frac{3}{x+1}-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{1+(x+1)^2}\right\}dx \\
&= 3\log|x+1|-\log(x^2+2x+2)-\arctan(x+1)
\end{aligned}$$

(6) $\dfrac{-10x^2+5x+48}{(x-2)(x-3)(x^2+4x+6)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4x+6}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-10x^2+5x+48=A(x-3)(x^2+4x+6)+B(x-2)(x^2+4x+6)+(Cx+D)(x-2)(x-3)$

$x=2$ を代入　　$18=-18A \qquad \therefore \quad A=-1$

$x=3$ を代入　　$-27=27B \qquad \therefore \quad B=-1$

$x=0$ を代入　　$48=-18A-12B+6D$

　　　　　　　　$8=-3A-2B+D$

　　　　　　　　$8=3+2+D \qquad \therefore \quad D=3$

$x=1$ を代入　　$43=-22A-11B+2(C+D)$

　　　　　　　　$43=22+11+2C+6 \qquad \therefore \quad C=2$

よって

$$\begin{aligned}
&\int \frac{-10x^2+5x+48}{(x-2)(x-3)(x^2+4x+6)}dx \\
&= \int \left(-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}+\frac{2x+3}{x^2+4x+6}\right)dx \\
&= \int \left\{-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}+\frac{(2x+4)-1}{x^2+4x+6}\right\}dx \\
&= \int \left\{-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}+\frac{2x+4}{x^2+4x+6}-\frac{1}{(\sqrt{2}\,)^2+(x+2)^2}\right\}dx \\
&= -\log|x-2|-\log|x-3|+\log(x^2+4x+6)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

(7) $\dfrac{7x^2+12x+65}{(x+1)(x-2)(x^2+2x+5)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+5}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$7x^2+12x+65=A(x-2)(x^2+2x+5)+B(x+1)(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x+1)(x-2)$

$x=-1$ を代入　　$60=-12A \quad \therefore \quad A=-5$

$x=2$ を代入　　$117=39B \quad \therefore \quad B=3$

$x=0$ を代入　　$65=-10A+5B-2D$
$65=50+15-2D \quad \therefore \quad D=0$

$x=1$ を代入　　$84=-8A+16B-2(C+D)$
$42=-4A+8B-(C+D)$
$42=20+24-C \quad \therefore \quad C=2$

よって

$$\begin{aligned}
&\int \frac{7x^2+12x+65}{(x+1)(x-2)(x^2+2x+5)}dx \\
&=\int\left(-\frac{5}{x+1}+\frac{3}{x-2}+\frac{2x}{x^2+2x+5}\right)dx \\
&=\int\left(-\frac{5}{x+1}+\frac{3}{x-2}+\frac{(2x+2)-2}{x^2+2x+5}\right)dx \\
&=\int\left\{-\frac{5}{x+1}+\frac{3}{x-2}+\frac{2x+2}{x^2+2x+5}-\frac{2}{2^2+(x+1)^2}\right\}dx \\
&=-5\log|x+1|+3\log|x-2|+\log(x^2+2x+5)-\arctan\frac{x+1}{2}
\end{aligned}$$

(8) $\dfrac{8x^2-16x+15}{x^2(x^2-2x+5)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-2x+5}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$8x^2-16x+15=Ax(x^2-2x+5)+B(x^2-2x+5)+(Cx+D)x^2$

$8x^2-16x+15=(A+C)x^3+(-2A+B+D)x^2+(5A-2B)x+5B$

係数比較して

$$\begin{cases}
A+C=0 & \cdots ① \\
-2A+B+D=8 & \cdots ② \\
5A-2B=-16 & \cdots ③ \\
5B=15 & \cdots ④
\end{cases}$$

④, ③, ①, ② の順で解けば $B=3,\ A=-2,\ C=2,\ D=1$

よって

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{8x^2-16x+15}{x^2(x^2-2x+5)}dx \\
&= \int \left(-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2x+1}{x^2-2x+5}\right)dx \\
&= \int \left\{-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{(2x-2)+3}{x^2-2x+5}\right\}dx \\
&= \int \left\{-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2x-2}{x^2-2x+5}+\frac{3}{2^2+(x-1)^2}\right\}dx \\
&= -2\log|x|-\frac{3}{x}+\log(x^2-2x+5)+\frac{3}{2}\arctan\frac{x-1}{2}
\end{aligned}
$$

★三角関数の有理形

三角関数の有理形の積分は，$t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置換する．このとき

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}$$

を用いる．つまり，与えられた x の積分を

$$\cos x \longrightarrow \frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \sin x \longrightarrow \frac{2t}{1+t^2},\qquad dx \longrightarrow \frac{2}{1+t^2}dt$$

とおきかえて，t の積分に変えて計算する．

【例題】

$\displaystyle\int \frac{\sin x+3\cos x+3}{\sin x(\sin x+\cos x+1)}dx$ を求めよ．

解答

$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin x+3\cos x+3}{\sin x(\sin x+\cos x+1)}dx &= \int \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}+3\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+3}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{t+3}{t(t+1)}dt \\
&= \int \left(\frac{3}{t}-\frac{2}{t+1}\right)dt \\
&= 3\log|t|-2\log|t+1| \\
&= 3\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|-2\log\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|
\end{aligned}
$$

※ $\dfrac{t+3}{t(t+1)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t+1}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$t+3 = A(t+1) + Bt$

$t = 0, -1$ を代入すれば，順に $A = 3,\ B = -2$ が求まる．

【問題 **2.5**】
$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくことにより，次の積分を求めよ．答えは，t についての積分を実行したところまででよいことにする（x の式にもどさなくてもよいことにする）．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{4+5\cos x}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x + 5}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{5\cos x + 12\sin x + 13}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos x}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin x}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{5}{3\sin x + 4\cos x}dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{3+\sin x}{\cos x(2+\cos x)}dx$

解答

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \log|t|$

(2)
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x}dx &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{2}{1-t^2}dt \\
&= \int \frac{-2}{(t+1)(t-1)}dt \\
&= \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)dt \\
&= \log|t+1| - \log|t-1|
\end{aligned}$$

※ $\dfrac{-2}{(t+1)(t-1)} = \dfrac{A}{t+1} + \dfrac{B}{t-1}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-2 = A(t-1) + B(t+1)$

$t = -1, 1$ を代入すれば，順に $A = 1,\ B = -1$ が求まる．

(3) $$\int \frac{1}{4+5\cos x}dx = \int \frac{1}{4+5\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$= \int \frac{2}{9-t^2}dt$$
$$= \int \frac{-2}{(t+3)(t-3)}dt$$
$$= \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+3}-\frac{1}{t-3}\right)dt$$
$$= \frac{1}{3}\left(\log|t+3|-\log|t-3|\right)$$

※ $\dfrac{-2}{(t+3)(t-3)} = \dfrac{A}{t+3}+\dfrac{B}{t-3}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-2 = A(t-3)+B(t+3)$

$t=-3, 3$ を代入すれば，順に $A=\dfrac{1}{3}$，$B=-\dfrac{1}{3}$ が求まる．

(4) $$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$= \int \frac{2}{t^2+2t+1}dt$$
$$= \int \frac{2}{(t+1)^2}dt$$
$$= -\frac{2}{t+1}$$

(5) $$\int \frac{1}{3\sin x+4\cos x+5}dx = \int \frac{1}{3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+4\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+5}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$= \int \frac{2}{t^2+6t+9}dt$$
$$= \int \frac{2}{(t+3)^2}dt$$
$$= -\frac{2}{t+3}$$

$$\begin{aligned}
(6)\quad \int \frac{1}{5\cos x + 12\sin x + 13}dx &= \int \frac{1}{5\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 12\cdot\dfrac{2t}{1+t^2} + 13}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{1}{4t^2+12t+9}dt \\
&= \int \frac{1}{(2t+3)^2}dt \\
&= -\frac{1}{2(2t+3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7)\quad \int \frac{1}{2+\cos x}dx &= \int \frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{2}{t^2+3}dt \\
&= \int \frac{2}{(\sqrt{3})^2+t^2}dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(8)\quad \int \frac{1}{2+\sin x}dx &= \int \frac{1}{2+\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{1}{t^2+t+1}dt \\
&= \int \frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2}dt \\
&= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\frac{t+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

(9) $$\int \frac{5}{3\sin x+4\cos x}dx = \int \frac{5}{3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+4\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$= \int \frac{-5}{2t^2-3t-2}dt$$
$$= \int \frac{-5}{(2t+1)(t-2)}dt$$
$$= \int \left(\frac{2}{2t+1}-\frac{1}{t-2}\right)dt$$
$$= \log|2t+1|-\log|t-2|$$

※ $\dfrac{-5}{(2t+1)(t-2)}=\dfrac{A}{2t+1}+\dfrac{B}{t-2}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-5=A(t-2)+B(2t+1)$

$t=-\dfrac{1}{2}$，2 を代入すれば，順に $A=2,\ B=-1$ が求まる．

(10) $$\int \frac{3+\sin x}{\cos x(2+\cos x)}dx = \int \frac{3+\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\left(2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{3(1+t^2)+2t}{2(1+t^2)+(1-t^2)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{3t^2+2t+3}{t^2+3}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$= \int \frac{6t^2+4t+6}{(1-t^2)(t^2+3)}dt$$
$$= \int \frac{-6t^2-4t-6}{(t+1)(t-1)(t^2+3)}dt$$
$$= \int \left(\frac{1}{t+1}-\frac{2}{t-1}+\frac{t-3}{t^2+3}\right)dt$$
$$= \int \left\{\frac{1}{t+1}-\frac{2}{t-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+3}-\frac{3}{(\sqrt{3})^2+t^2}\right\}dt$$
$$= \log|t+1|-2\log|t-1|+\frac{1}{2}\log(t^2+3)-\sqrt{3}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}$$

※ $\dfrac{-6t^2-4t-6}{(t+1)(t-1)(t^2+3)}=\dfrac{A}{t+1}+\dfrac{B}{t-1}+\dfrac{Ct+D}{t^2+3}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-6t^2-4t-6=A(t-1)(t^2+3)+B(t+1)(t^2+3)+(Ct+D)(t+1)(t-1)$

$t=-1$ を代入　$-8=-8A \quad \therefore \quad A=1$

$t=1$ を代入　$-16=8B \quad \therefore \quad B=-2$

$t=0$ を代入　$-6=-3A+3B-D$

$-6=-3-6-D \quad \therefore \quad D=-3$

$t=2$ を代入　$-38=7A+21B+3(2C+D)$

$-38=7-42+6C-9 \quad \therefore \quad C=1$

★根号を含む有理形

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a>0)$ を含む有理形の積分は

$$\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x=t$$

と置換する．このとき

$$x, \quad \frac{dx}{dt}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c}$$

を t で表し，これらを用いる．

【例題】

$\displaystyle\int \frac{7}{(8x+3)\sqrt{x^2+x+1}}dx$ を求めよ．

解答

$\sqrt{x^2+x+1}+x=t$ とおくと $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$ $\cdots$①

① の両辺を 2 乗すると

$$x^2+x+1=t^2-2tx+x^2$$

$$(2t+1)x=t^2-1 \qquad \therefore \quad x=\frac{t^2-1}{2t+1} \quad \cdots ②$$

また，② を微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t\cdot(2t+1)-(t^2-1)\cdot 2}{(2t+1)^2}=\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2} \quad \cdots ③$$

さらに，② を ① へ代入すると

$$\sqrt{x^2+x+1}=t-x=t-\frac{t^2-1}{2t+1}=\frac{t^2+t+1}{2t+1} \quad \cdots ④$$

よって，②,③,④ より

$$\int \frac{7}{(8x+3)\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$=\int \frac{7}{\left(8\cdot\dfrac{t^2-1}{2t+1}+3\right)\dfrac{t^2+t+1}{2t+1}}\cdot\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt$$

$$=\int \frac{7(2t+1)}{8(t^2-1)+3(2t+1)}\cdot\frac{2}{2t+1}dt$$

$$= \int \frac{14}{8t^2+6t-5}dt$$
$$= \int \frac{14}{(2t-1)(4t+5)}dt$$
$$= \int \left(\frac{2}{2t-1} - \frac{4}{4t+5}\right)dt$$
$$= \log|2t-1| - \log|4t+5|$$
$$= \log\left|2\sqrt{x^2+x+1}+2x-1\right| - \log\left|4\sqrt{x^2+x+1}+4x+5\right|$$

【問題 2.6】
次の積分を，カッコ内の置換により求めよ．答えは，t についての積分を実行したところまででよいことにする（x の式にもどさなくてもよいことにする）．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx \quad \left(\sqrt{x^2+2x+3}+x=t\right)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx \quad \left(\sqrt{x^2+3x+1}+x=t\right)$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx \quad \left(\sqrt{x^2+1}+x=t\right)$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x-9}}dx \quad \left(\sqrt{x^2-x-9}+x=t\right)$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-5x-1}}dx \quad \left(\sqrt{x^2-5x-1}+x=t\right)$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{4x^2+x+1}}dx \quad \left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x=t\right)$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2x^2+5x+4}}dx \quad \left(\sqrt{2x^2+5x+4}+\sqrt{2}x=t\right)$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1}dx \quad \left(\sqrt{x^2+1}+x=t\right)$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}dx \quad \left(\sqrt{x^2+x+1}+x=t\right)$

(10) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}dx \quad \left(\sqrt{x^2+x+1}+x=t\right)$

解答
(1) $\sqrt{x^2+2x+3}=t-x$ の両辺を 2 乗すると

$$x^2+2x+3=t^2-2tx+x^2$$

$$2(t+1)x=t^2-3 \qquad \therefore \quad x=\frac{t^2-3}{2(t+1)}$$

また

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t\cdot(t+1)-(t^2-3)\cdot 1}{(t+1)^2}=\frac{t^2+2t+3}{2(t+1)^2}$$

さらに

$$\sqrt{x^2+2x+3}=t-x=t-\frac{t^2-3}{2(t+1)}=\frac{t^2+2t+3}{2(t+1)}$$

よって

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx &= \int\frac{1}{\dfrac{t^2+2t+3}{2(t+1)}}\cdot\frac{t^2+2t+3}{2(t+1)^2}dt\\ &= \int\frac{1}{t+1}dt\\ &= \log|t+1|\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x^2+3x+1}=t-x$ の両辺を 2 乗すると

$x^2+3x+1=t^2-2tx+x^2$

$(2t+3)x=t^2-1 \qquad \therefore \quad x=\dfrac{t^2-1}{2t+3}$

また

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t\cdot(2t+3)-(t^2-1)\cdot 2}{(2t+3)^2}=\frac{2(t^2+3t+1)}{(2t+3)^2}$$

さらに

$$\sqrt{x^2+3x+1}=t-x=t-\frac{t^2-1}{2t+3}=\frac{t^2+3t+1}{2t+3}$$

よって

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx &= \int\frac{1}{\dfrac{t^2+3t+1}{2t+3}}\cdot\frac{2(t^2+3t+1)}{(2t+3)^2}dt\\ &= \int\frac{2}{2t+3}dt\\ &= \log|2t+3|\end{aligned}$$

(3) $\sqrt{x^2+1}=t-x$ の両辺を 2 乗すると

$x^2+1=t^2-2tx+x^2$

$2tx=t^2-1 \qquad \therefore \quad x=\dfrac{t^2-1}{2t}\ \left(=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\right)$

また

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)=\frac{t^2+1}{2t^2}$$

さらに

$$\sqrt{x^2+1}=t-x=t-\frac{t^2-1}{2t}=\frac{t^2+1}{2t}$$

よって

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{1}{\dfrac{t^2-1}{2t}\cdot\dfrac{t^2+1}{2t}}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt \\
&= \int \frac{2}{t^2-1}dt \\
&= \int \frac{2}{(t-1)(t+1)}dt \\
&= \int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= \log|t-1|-\log|t+1|
\end{aligned}
$$

(4) $\sqrt{x^2-x-9}=t-x$ の両辺を 2 乗すると

$x^2-x-9=t^2-2tx+x^2$

$(2t-1)x=t^2+9 \qquad \therefore \quad x=\dfrac{t^2+9}{2t-1}$

また

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t\cdot(2t-1)-(t^2+9)\cdot 2}{(2t-1)^2}=\dfrac{2(t^2-t-9)}{(2t-1)^2}$

さらに

$\sqrt{x^2-x-9}=t-x=t-\dfrac{t^2+9}{2t-1}=\dfrac{t^2-t-9}{2t-1}$

よって

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x-9}}dx &= \int \frac{1}{\dfrac{t^2+9}{2t-1}\cdot\dfrac{t^2-t-9}{2t-1}}\cdot\frac{2(t^2-t-9)}{(2t-1)^2}dt \\
&= \int \frac{2}{t^2+9}dt \\
&= \int \frac{2}{3^2+t^2}dt \\
&= \frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}
\end{aligned}
$$

(5) $\sqrt{x^2-5x-1}=t-x$ の両辺を 2 乗すると

$x^2-5x-1=t^2-2tx+x^2$

$(2t-5)x=t^2+1 \qquad \therefore \quad x=\dfrac{t^2+1}{2t-5}$

また

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t\cdot(2t-5)-(t^2+1)\cdot 2}{(2t-5)^2}=\dfrac{2(t^2-5t-1)}{(2t-5)^2}$

さらに

$$\sqrt{x^2-5x-1}=t-x=t-\frac{t^2+1}{2t-5}=\frac{t^2-5t-1}{2t-5}$$

よって

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-5x-1}}dx &= \int\frac{1}{\left(\dfrac{t^2+1}{2t-5}-2\right)\dfrac{t^2-5t-1}{2t-5}}\cdot\frac{2(t^2-5t-1)}{(2t-5)^2}dt\\
&= \int\frac{2t-5}{(t^2+1)-2(2t-5)}\cdot\frac{2}{2t-5}dt\\
&= \int\frac{2}{t^2-4t+11}dt\\
&= \int\frac{2}{(\sqrt{7})^2+(t-2)^2}dt\\
&= \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{t-2}{\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

(6) $\sqrt{4x^2+x+1}=t-2x$ の両辺を 2 乗すると

$$4x^2+x+1=t^2-4tx+4x^2$$

$$(4t+1)x=t^2-1 \qquad \therefore \quad x=\frac{t^2-1}{4t+1}$$

また

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t\cdot(4t+1)-(t^2-1)\cdot 4}{(4t+1)^2}=\frac{2(2t^2+t+2)}{(4t+1)^2}$$

さらに

$$\sqrt{4x^2+x+1}=t-2x=t-2\cdot\frac{t^2-1}{4t+1}=\frac{2t^2+t+2}{4t+1}$$

よって

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{4x^2+x+1}}dx &= \int\frac{1}{\left(\dfrac{t^2-1}{4t+1}+1\right)\dfrac{2t^2+t+2}{4t+1}}\cdot\frac{2(2t^2+t+2)}{(4t+1)^2}dt\\
&= \int\frac{4t+1}{(t^2-1)+(4t+1)}\cdot\frac{2}{4t+1}dt\\
&= \int\frac{2}{t^2+4t}dt\\
&= \int\frac{2}{t(t+4)}dt\\
&= \int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+4}\right)dt\\
&= \frac{1}{2}\big(\log|t|-\log|t+4|\big)
\end{aligned}$$

(7) $\sqrt{2x^2+5x+4}=t-\sqrt{2}\,x$ の両辺を 2 乗すると

$2x^2+5x+4=t^2-2\sqrt{2}\,tx+2x^2$

$(2\sqrt{2}\,t+5)x=t^2-4 \qquad \therefore \quad x=\dfrac{t^2-4}{2\sqrt{2}\,t+5}$

また

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t\cdot(2\sqrt{2}\,t+5)-(t^2-4)\cdot 2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2}\,t+5)^2}=\frac{2(\sqrt{2}\,t^2+5t+4\sqrt{2}\,)}{(2\sqrt{2}\,t+5)^2}$$

さらに

$$\sqrt{2x^2+5x+4}=t-\sqrt{2}\,x=t-\frac{\sqrt{2}\,(t^2-4)}{2\sqrt{2}\,t+5}=\frac{\sqrt{2}\,t^2+5t+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\,t+5}$$

よって

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x\sqrt{2x^2+5x+4}}dx &= \int\frac{1}{\dfrac{t^2-4}{2\sqrt{2}\,t+5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}\,t^2+5t+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\,t+5}}\cdot\frac{2(\sqrt{2}\,t^2+5t+4\sqrt{2}\,)}{(2\sqrt{2}\,t+5)^2}dt\\ &= \int\frac{2}{t^2-4}dt\\ &= \int\frac{2}{(t-2)(t+2)}dt\\ &= \int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt\\ &= \frac{1}{2}\big(\log|t-2|-\log|t+2|\big)\end{aligned}$$

(8) (3) で導いた

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2+1}{2t^2},\ \sqrt{x^2+1}=\dfrac{t^2+1}{2t}$

を用いると

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1}dx &= \int\frac{1}{\dfrac{t^2+1}{2t}-1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt\\ &= \int\frac{2t}{(t^2+1)-2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt\\ &= \int\frac{t^2+1}{t(t-1)^2}dt\\ &= \int\left\{\frac{1}{t}+\frac{2}{(t-1)^2}\right\}dt\\ &= \log|t|-\frac{2}{t-1}\end{aligned}$$

※ $\dfrac{t^2+1}{t(t-1)^2}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t-1}+\dfrac{C}{(t-1)^2}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$t^2+1=A(t-1)^2+Bt(t-1)+Ct$

$t=0$ を代入　　$1=A$

$t=1$ を代入　　$2=C$

$t=-1$ を代入　　$2=4A+2B-C$

$2=4+2B-2 \qquad \therefore \quad B=0$

(9) 例題で導いた

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}$$

を用いると

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}dx &= \int \frac{1}{t}\cdot\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt \\ &= \int \frac{2(t^2+t+1)}{t(2t+1)^2}dt \\ &= \int \left\{ \frac{2}{t}-\frac{3}{2t+1}-\frac{3}{(2t+1)^2} \right\} dt \\ &= 2\log|t|-\frac{3}{2}\log|2t+1|+\frac{3}{2(2t+1)}\end{aligned}$$

※ $\dfrac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{2t+1}+\dfrac{C}{(2t+1)^2}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$2(t^2+t+1)=A(2t+1)^2+Bt(2t+1)+Ct$

$t=0$ を代入　　$2=A$

$t=-\dfrac{1}{2}$ を代入　　$\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}C \qquad \therefore \quad C=-3$

$t=1$ を代入　　$6=9A+3B+C$

$6=18+3B-3 \qquad \therefore \quad B=-3$

(10) 例題で導いた

$$x=\frac{t^2-1}{2t+1},\ \frac{dx}{dt}=\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2},\ \sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2+t+1}{2t+1}$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}dx &= \int \frac{2}{\left(\dfrac{t^2-1}{2t+1}\right)^2 \dfrac{t^2+t+1}{2t+1}} \cdot \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt \\
&= \int \frac{8t+4}{(t^2-1)^2}dt \\
&= \int \frac{8t+4}{(t-1)^2(t+1)^2}dt \\
&= \int \left\{-\frac{1}{t-1} + \frac{3}{(t-1)^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\right\}dt \\
&= -\log|t-1| - \frac{3}{t-1} + \log|t+1| + \frac{1}{t+1}
\end{aligned}
$$

※ $\dfrac{8t+4}{(t-1)^2(t+1)^2} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{(t-1)^2} + \dfrac{C}{t+1} + \dfrac{D}{(t+1)^2}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$8t+4 = A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)^2 + C(t-1)^2(t+1) + D(t-1)^2$

$t=1$ を代入　　$12 = 4B \quad \therefore \quad B = 3$

$t=-1$ を代入　　$-4 = 4D \quad \therefore \quad D = -1$

$t=0$ を代入　　$4 = -A+B+C+D$

　　$4 = -A+3+C-1 \quad \therefore \quad C = A+2$

t^3 の係数比較　　$0 = A+C$

　　$0 = A+(A+2) \quad \therefore \quad A=-1,\ C=1$

★定積分

連続関数 $f(x)$ の原始関数のひとつを $F(x)$ とするとき，定積分は

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

で計算する（積分してから数値の代入）.

【問題 2.7】

次を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 (x^2-2x+3)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^3 (3x^2-6x+1)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 (2x^2+x-6)dx$　　(4) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3+3x^2-2x+4}{x^2}dx$

(5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$　　(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\cos x dx$

(7) $\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \log x dx$

(8) $\displaystyle\int_1^2 xe^x dx$

(9) $\displaystyle\int_{-1}^3 (2x+1)e^{-x} dx$

(10) $\displaystyle\int_1^2 x^4 \log x dx$

(11) $\displaystyle\int_1^e (\log x)^2 dx$

(12) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-2x}{1+x^2} dx$

(13) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(14) $\displaystyle\int_{-1}^3 (x+1)^2(x-3) dx$

(15) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| dx$

(16) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (3x - \cos x)^2 dx$

(17) $\displaystyle\int_{-3}^{\sqrt{3}} \frac{1}{9+x^2} dx$

(18) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{(\log x)^2}{x} dx$

(19) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$

(20) $\displaystyle\int_{-1}^4 x\sqrt{x^2+4}\, dx$

(21) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \arctan x dx$

(22) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x dx$

(23) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

(24) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arcsin x dx$

(25) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} 2x \arctan x dx$

(26) $\displaystyle\int_0^1 2x(\arctan x)^2 dx$

(27) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x+1}{x^2-4x+8} dx$

解答

(1)
$$\begin{aligned}\int_0^2 (x^2-2x+3)dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}(8-0) - (4-0) + 3(2-0) \\ &= \frac{14}{3}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 (3x^2-6x+1)dx &= \left[x^3 - 3x^2 + x\right]_{-1}^3 \\ &= \{27-(-1)\} - 3(9-1) + \{3-(-1)\} \\ &= 8\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(2x^2+x-6)dx &= \left[\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x\right]_{-1}^{2}\\ &= \frac{2}{3}\{8-(-1)\}+\frac{1}{2}(4-1)-6\{2-(-1)\}\\ &= -\frac{21}{2}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\int_{2}^{3}\frac{x^3+3x^2-2x+4}{x^2}dx &= \int_{2}^{3}\left(x+3-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2+3x-2\log|x|-\frac{4}{x}\right]_{2}^{3}\\ &= \frac{1}{2}(9-4)+3(3-2)-2(\log 3-\log 2)-4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{37}{6}-2\log\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(5)
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\Big[\tan x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(6)
$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x\cos x dx &= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)dx\\ &= \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}\\ &= -\frac{1}{8}(\cos\pi-\cos 0)-\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)\\ &= -\frac{1}{8}\{(-1)-1\}-\frac{1}{4}(0-1)\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(7)
$$\begin{aligned}\int_{e^2}^{e^3}\log x dx &= \Big[x\log x-x\Big]_{e^2}^{e^3}\\ &= (e^3\log e^3-e^2\log e^2)-(e^3-e^2)\\ &= (e^3\cdot 3-e^2\cdot 2)-(e^3-e^2)\\ &= 2e^3-e^2\end{aligned}$$

(8)
$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x-\int e^x dx\\ &= xe^x-e^x\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} x & e^x \\ 1 & e^x \end{array}$$

であるから

$$\int_1^2 xe^x dx = \Big[xe^x - e^x\Big]_1^2 = (2e^2 - 1\cdot e) - (e^2 - e) = e^2$$

(9)
$$\begin{aligned}\int (2x+1)e^{-x}dx &= -(2x+1)e^{-x} + 2\int e^{-x}dx \\ &= -(2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} \\ &= -2xe^{-x} - 3e^{-x}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} 2x+1 & & -e^{-x} \\ 2 & & e^{-x} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 (2x+1)e^{-x}dx &= \Big[-2xe^{-x} - 3e^{-x}\Big]_{-1}^3 \\ &= -2\{3e^{-3} - (-1)\cdot e\} - 3(e^{-3} - e) \\ &= e - \frac{9}{e^3}\end{aligned}$$

(10)
$$\begin{aligned}\int x^4 \log x dx &= \frac{1}{5}x^5 \log x - \frac{1}{5}\int x^4 dx \\ &= \frac{1}{5}x^5\log x - \frac{1}{25}x^5\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \log x & & \frac{1}{5}x^5 \\ \frac{1}{x} & & x^4 \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int x^4 \log x dx &= \Big[\frac{1}{5}x^5\log x - \frac{1}{25}x^5\Big]_1^2 \\ &= \frac{1}{5}(32\log 2 - 1\cdot\log 1) - \frac{1}{25}(32-1) \\ &= \frac{1}{5}(32\log 2 - 1\cdot 0) - \frac{1}{25}(32-1) \\ &= \frac{32}{5}\log 2 - \frac{31}{25}\end{aligned}$$

(11)
$$\begin{aligned}\int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - 2\int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2\left(x\log x - \int dx\right) \\ &= x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) \\ &= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} (\log x)^2 & & x \\ 2\log x\cdot\frac{1}{x} & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \log x & & x \\ \frac{1}{x} & & 1 \end{array}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\int_1^e (\log x)^2 dx &= \Big[x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\Big]_1^e \\
&= \{e(\log e)^2 - 1\cdot(\log 1)^2\} - 2(e\log e - 1\cdot\log 1) + 2(e-1) \\
&= (e\cdot 1^2 - 1\cdot 0^2) - 2(e\cdot 1 - 1\cdot 0) + 2(e-1) \\
&= e - 2
\end{aligned}
$$

(12) $$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-2x}{1+x^2}dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2}\right)dx \\
&= \Big[\arctan x - \log(1+x^2)\Big]_0^1 \\
&= (\arctan 1 - \arctan 0) - (\log 2 - \log 1) \\
&= \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - (\log 2 - 0) \\
&= \frac{\pi}{4} - \log 2
\end{aligned}
$$

(13) $$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \Big[\arcsin x\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

(14) $$
\begin{aligned}
\int (x+1)^2(x-3)dx &= \frac{1}{3}(x+1)^3(x-3) - \frac{1}{3}\int (x+1)^3 dx \\
&= \frac{1}{3}(x+1)^3(x-3) - \frac{1}{12}(x+1)^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
x-3 & & \frac{1}{3}(x+1)^3 \\
1 & & (x+1)^2
\end{array}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^3 (x+1)^2(x-3)dx &= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3(x-3) - \frac{1}{12}(x+1)^4\right]_{-1}^3 \\
&= \frac{1}{3}\{64\cdot 0 - 0\cdot(-4)\} - \frac{1}{12}(256-0) \\
&= -\frac{64}{3}
\end{aligned}
$$

(15) $$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right)dx \\
&= \left[\sin x - \frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{x}{2} - \sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \sqrt{3} - \frac{\pi}{12} - 1
\end{aligned}
$$

(16) $\displaystyle\int (3x - \cos x)^2 dx$

$$
\begin{aligned}
&= \int (9x^2 - 6x\cos x + \cos^2 x)dx \\
&= 3x^3 - 6\left(x\sin x - \int \sin x dx\right) + \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx \\
&= 3x^3 - 6(x\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) \\
&= 3x^3 + \frac{1}{2}x - 6x\sin x - 6\cos x + \frac{1}{4}\sin 2x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
x & & \sin x \\
1 & & \cos x
\end{array}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (3x - \cos x)^2 dx &= \left[3x^3 + \frac{1}{2}x - 6x\sin x - 6\cos x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 3\left(\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{216}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 6\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
&\qquad - 6\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 3\left(\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{216}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 6\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1 - \frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}\right) \\
&\qquad - 6\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{13}{36}\pi^3 - \frac{7}{3}\pi + \frac{23\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}
$$

(17)
$$
\begin{aligned}
\int_{-3}^{\sqrt{3}} \frac{1}{9+x^2}dx &= \int_{-3}^{\sqrt{3}} \frac{1}{3^2+x^2}dx \\
&= \left[\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right]_{-3}^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{3}\left\{\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan(-1)\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \\
&= \frac{5}{36}\pi
\end{aligned}
$$

(18)
$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{(\log x)^2}{x}dx &= \int_e^{e^2} (\log x)^2 \cdot \frac{1}{x}dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(\log x)^3\right]_e^{e^2} \\ &= \frac{1}{3}\left\{(\log e^2)^3 - (\log e)^3\right\} \\ &= \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) \\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

(19)
$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2xdx = \frac{1}{2}\left[2(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\right]_0^2 = 2\sqrt{2} - 2$$

(20)
$$\begin{aligned}\int_{-1}^4 x\sqrt{x^2+4}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-1}^4 (x^2+4)^{\frac{1}{2}} \cdot 2xdx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^4 \\ &= \frac{1}{3}\left(40\sqrt{5} - 5\sqrt{5}\right) \\ &= \frac{35\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

(21)
$$\begin{aligned}\int \arctan x dx &= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \arctan x & & x \\ \dfrac{1}{1+x^2} & & 1 \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}} \arctan x dx &= \left[x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= \left(\sqrt{3} \cdot \arctan\sqrt{3} - 1 \cdot \arctan 1\right) - \frac{1}{2}(\log 4 - \log 2) \\ &= \left(\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 1 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{4}{2} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(22)\quad \int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x dx &= \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} - (-1) \cdot \arctan(-1)\right\} - \frac{1}{2}\left(\log \frac{4}{3} - \log 2\right) \\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} - (-1) \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} - \frac{1}{2}\log \frac{\frac{4}{3}}{2} \\
&= \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(11)\quad \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) dx \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\arcsin x & & x \\
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & & 1
\end{array}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx &= \left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \arcsin \frac{1}{2} - 0 \cdot \arcsin 0\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - 0 \cdot 0\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1
\end{aligned}
$$

$$
(24)\quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arcsin x dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

(25) $$\begin{aligned}\int 2x\arctan x\,dx &= (x^2+1)\arctan x - \int dx \\ &= (x^2+1)\arctan x - x\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \arctan x & & x^2+1 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & & 2x \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} 2x\arctan x\,dx &= \Big[(x^2+1)\arctan x - x\Big]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\ &= \left\{4\cdot\arctan\sqrt{3} - \frac{4}{3}\cdot\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} - \left\{\sqrt{3} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} \\ &= \left\{4\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} - \left\{\sqrt{3} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} \\ &= \frac{14}{9}\pi - \frac{4\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

(26) $$\int 2x(\arctan x)^2 dx$$

$$\begin{array}{ccc} (\arctan x)^2 & & x^2+1 \\ 2\arctan x\cdot\dfrac{1}{1+x^2} & & 2x \end{array}$$

$$\begin{aligned}&= (x^2+1)(\arctan x)^2 - 2\int \arctan x\,dx \\ &= (x^2+1)(\arctan x)^2 - 2\left\{x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right\} \\ &= (x^2+1)(\arctan x)^2 - 2x\arctan x + \log(1+x^2)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x(\arctan x)^2 dx &= \Big[(x^2+1)(\arctan x)^2 - 2x\arctan x + \log(1+x^2)\Big]_0^1 \\ &= \left\{2\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 1\cdot 0^2\right\} - 2\left(1\cdot\frac{\pi}{4} - 0\cdot 0\right) + (\log 2 - 0) \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + \log 2\end{aligned}$$

(27) $$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2-4x+8}dx &= \int \frac{(2x-4)+5}{x^2-4x+8}dx \\ &= \int\left\{\frac{2x-4}{x^2-4x+8} + \frac{5}{2^2+(x-2)^2}\right\}dx \\ &= \log(x^2-4x+8) + \frac{5}{2}\arctan\frac{x-2}{2}\end{aligned}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{2x+1}{x^2-4x+8}dx &= \left[\log(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}\arctan\frac{x-2}{2}\right]_2^4 \\
&= (\log 8-\log 4)+\frac{5}{2}(\arctan 1-\arctan 0) \\
&= \log\frac{8}{4}+\frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) \\
&= \log 2+\frac{5}{8}\pi
\end{aligned}
$$

★広義積分

(1) f が $[a,\infty)$ で連続なとき

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$$

(2) f が $(a,b]$ で連続なとき

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

【問題 2.8】

次の広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-2x}dx$

(3) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2-x+1}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}\cos x dx$

(6) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$

(8) $\displaystyle\int_0^3 (2x+1)\log x dx$

(9) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{(x+1)^2}dx$

(10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^2}dx$

(11) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{4}{x^4+x^2+1}dx$

解答

(1) $\displaystyle\int_0^R \frac{1}{x^2+1}dx = \Big[\arctan x\Big]_0^R = \arctan R - 0 = \arctan R$

であるから

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{R\to\infty}\arctan R = \frac{\pi}{2}$$

※ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$ であることはグラフからわかる．

$$(2)\ \int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dash] \arrow[dr] & -\frac{1}{2}e^{-2x} \arrow[dl] \\ 1 & e^{-2x} \end{tikzcd}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^R xe^{-2x}dx &= \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^R \\ &= -\frac{1}{2}(Re^{-2R} - 0\cdot 1) - \frac{1}{4}(e^{-2R} - 1) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}Re^{-2R} - \frac{1}{4}e^{-2R}\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^\infty xe^{-2x}dx = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}Re^{-2R} - \frac{1}{4}e^{-2R}\right) = \frac{1}{4}$$

※ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}} \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = 0$

ここで,「$\overset{*}{=}$」のところで L'Hospital(ロピタル) の定理を用いた．以降の問題も同様.

$$(3)\ \int \frac{\log x}{x^2}dx = -\frac{\log x}{x} + \int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\begin{tikzcd} \log x \arrow[r, dash] \arrow[dr] & -\frac{1}{x} \arrow[dl] \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \end{tikzcd}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_e^R \frac{\log x}{x^2}dx &= \left[-\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}\right]_e^R \\ &= -\left(\frac{\log R}{R} - \frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{e}\right) \\ &= \frac{2}{e} - \frac{\log R}{R} - \frac{1}{R}\end{aligned}$$

よって

$$\int_e^\infty \frac{\log x}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{2}{e} - \frac{\log R}{R} - \frac{1}{R}\right) = \frac{2}{e}$$

※ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$

(4)
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx &= \int \frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}dx \\ &= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\frac{x-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{1}{x^2-x+1}dx &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^R \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\arctan\frac{2R-1}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\arctan\frac{2R-1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2-x+1}dx = \lim_{R\to\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\arctan\frac{2R-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi$$

(5) $\displaystyle\int e^{-3x}\cos x dx$

$$\begin{aligned}&= e^{-3x}\sin x + 3\int e^{-3x}\sin x dx \\ &= e^{-3x}\sin x + 3\left(-e^{-3x}\cos x - 3\int e^{-3x}\cos x dx\right) \\ &= e^{-3x}\sin x - 3e^{-3x}\cos x - \underbrace{9\int e^{-3x}\cos x dx}_{\text{移項}}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} e^{-3x} & & \sin x \\ -3e^{-3x} & & \cos x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} e^{-3x} & & -\cos x \\ -3e^{-3x} & & \sin x \end{array}$$

であるから

$$\int e^{-3x}\cos x dx = \frac{1}{10}(e^{-3x}\sin x - 3e^{-3x}\cos x)$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^R e^{-3x}\cos x dx &= \left[\frac{1}{10}(e^{-3x}\sin x - 3e^{-3x}\cos x)\right]_0^R \\ &= \frac{1}{10}(e^{-3R}\sin R - 1\cdot 0) - \frac{3}{10}(e^{-3R}\cos R - 1\cdot 1) \\ &= \frac{3}{10}+\frac{1}{10}e^{-3R}\sin R - \frac{3}{10}e^{-3R}\cos R\end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_0^\infty e^{-3x}\cos x dx = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}e^{-3R}\sin R-\frac{3}{10}e^{-3R}\cos R\right) = \frac{3}{10}$$

※ $|e^{-3x}\sin x| \leqq e^{-3x}$, $|e^{-3x}\cos x| \leqq e^{-3x}$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-3x} = 0$ であるから，はさみうちの定理より

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-3x}\sin x = 0,\ \lim_{x\to\infty} e^{-3x}\cos x = 0$

(6) $\displaystyle\int_{-1+\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \Big[\arcsin x\Big]_{-1+\varepsilon}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} - \arcsin(-1+\varepsilon)$

であるから

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\frac{\pi}{6} - \arcsin(-1+\varepsilon)\right\} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

(7)
$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx &= 2\sqrt{x}\log x - 2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= 2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \log x & & 2\sqrt{x} \\ \dfrac{1}{x} & & \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx &= \Big[2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x}\Big]_{\varepsilon}^{1} \\ &= 2\big(1\cdot 0 - \sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon\big) - 4\big(1-\sqrt{\varepsilon}\big) \\ &= -4 - 2\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon + 4\sqrt{\varepsilon}\end{aligned}$$

よって

$$\int_{0}^{1} \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\big(-4 - 2\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon + 4\sqrt{\varepsilon}\big) = -4$$

※ $\alpha > 0$ のとき

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha}\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-\alpha}} \overset{*}{=} \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to+0}\frac{x^{\alpha}}{-\alpha} = 0$$

(8)
$$\begin{aligned}\int (2x+1)\log x dx &= (x^2+x)\log x - \int (x+1)dx \\ &= (x^2+x)\log x - \frac{1}{2}x^2 - x\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \log x & & x^2+x \\ \dfrac{1}{x} & & 2x+1 \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{3} (2x+1)\log x dx &= \left[(x^2+x)\log x - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_{\varepsilon}^{3} \\ &= \{12\log 3 - (\varepsilon^2+\varepsilon)\log\varepsilon\} - \frac{1}{2}(9-\varepsilon^2) - (3-\varepsilon) \\ &= 12\log 3 - \frac{15}{2} - \varepsilon^2\log\varepsilon - \varepsilon\log\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \varepsilon\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\int_{0}^{3} (2x+1)\log x dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(12\log 3 - \frac{15}{2} - \varepsilon^2\log\varepsilon - \varepsilon\log\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \varepsilon\right) \\ &= 12\log 3 - \frac{15}{2}\end{aligned}$$

(9) $$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{(x+1)^2}dx &= -\frac{\log x}{x+1}+\int \frac{1}{x(x+1)}dx \\ &= -\frac{\log x}{x+1}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= -\frac{\log x}{x+1}+\log x-\log(x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \log x & & -\dfrac{1}{x+1} \\ \dfrac{1}{x} & & \dfrac{1}{(x+1)^2} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_1^R \frac{\log x}{(x+1)^2}dx &= \left[-\frac{\log x}{x+1}+\log x-\log(x+1)\right]_1^R \\ &= -\left(\frac{\log R}{R+1}-\frac{0}{2}\right)+(\log R-0)-\{\log(R+1)-\log 2\} \\ &= \log 2+\log\frac{R}{R+1}-\frac{\log R}{R+1}\end{aligned}$$

よって

$$\int_1^{\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2}dx=\lim_{R\to\infty}\left(\log 2+\log\frac{1}{1+\frac{1}{R}}-\frac{\log R}{R+1}\right)=\log 2$$

※ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x+1}\overset{*}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

(10) $\displaystyle\int \frac{\log x}{(x+1)^2}dx=-\frac{\log x}{x+1}+\log x-\log(x+1)=\frac{x\log x}{x+1}-\log(x+1)$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^1 \frac{\log x}{(x+1)^2}dx &= \left[\frac{x\log x}{x+1}-\log(x+1)\right]_{\varepsilon}^1 \\ &= \left(\frac{1\cdot 0}{2}-\frac{\varepsilon\log\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)-\{\log 2-\log(\varepsilon+1)\} \\ &= -\log 2+\log(\varepsilon+1)-\frac{\varepsilon\log\varepsilon}{\varepsilon+1}\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^2}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{-\log 2+\log(\varepsilon+1)-\frac{\varepsilon\log\varepsilon}{\varepsilon+1}\right\}=-\log 2$$

※ $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\overset{*}{=}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$

(11) $\displaystyle\frac{4}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$

が常に成り立つような定数 A,B,C,D を求めると，$A=2,\ B=2,\ C=-2,\ D=2$ であるから

$$\int \frac{4}{x^4+x^2+1}dx$$

$$=\int\left(\frac{2x+2}{x^2+x+1}-\frac{2x-2}{x^2-x+1}\right)dx$$

$$= \int \left\{ \frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1} - \frac{(2x-1)-1}{x^2-x+1} \right\} dx$$

$$= \int \left\{ \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (x+\frac{1}{2})^2} - \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (x-\frac{1}{2})^2} \right\} dx$$

$$= \log(x^2+x+1) + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \log(x^2+x+1) + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \log \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

であるから

$$\int_1^R \frac{4}{x^4+x^2+1} dx$$

$$= \left[\log \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]_1^R$$

$$= \left(\log \frac{R^2+R+1}{R^2-R+1} - \log 3 \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2R+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2R-1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right)$$

よって

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{4}{x^4+x^2+1} dx &= \lim_{R\to\infty} \Bigg\{ \left(\log \frac{1+\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}}{1-\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}} - \log 3 \right) \\
&\qquad + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2R+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3} \right) \\
&\qquad\qquad + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2R-1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right) \Bigg\} \\
&= (0 - \log 3) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 3
\end{aligned}$$

§3.　2 変数関数の偏微分

★ 2 変数関数の極値判定法

$f(x,y)$: C^2 級，$(a,b) \in \mathbb{R}^2$

(1) $f(a,b)$: 極値　$\Longrightarrow$　$f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$

(2) $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0$　$\Longrightarrow$　$f(a,b)$: 極小値
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0$　$\Longrightarrow$　$f(a,b)$: 極大値
$H(a,b)<0$　$\Longrightarrow$　$f(a,b)$: 極値でない
ただし $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$ とする．

☆まずは連立方程式 $f_x(x,y)=0,\ f_y(x,y)=0$ を解いて停留点を求める．次に停留点に対して $H(x,y),\ f_{xx}(x,y)$ の符号を調べて極値の判定をする．

【例題】
次の関数の停留点を求め，極値の判定をせよ．

(1) $f(x,y)=x^3+x^2y-xy-y^2$　　(2) $f(x,y)=3x^2y+y^3-3x^2-3y^2$

(3) $f(x,y)=x^3+y^3+x^2+y^2+xy$

解答
(1) $f(x,y)=x^3+x^2y-xy-y^2$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+2xy-y=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=x^2-x-2y=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$y=\dfrac{x^2-x}{2}$

① へ代入すると

$$\begin{aligned} &3x^2+2x\cdot\frac{x^2-x}{2}-\frac{x^2-x}{2}=0 \\ &6x^2+2x(x^2-x)-(x^2-x)=0 \\ &2x^3+3x^2+x=0 \\ &x(x+1)(2x+1)=0 \qquad \therefore\quad x=0,-1,-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$x=0$ のとき，② より　$y=0$
$x=-1$ のとき，② より　$y=1$
$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき，② より　$y=\dfrac{3}{8}$

よって，停留点は　$(0,0),\ (-1,1),\ \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{8}\right)$

判定

$f_{xx}(x,y)=6x+2y,\ f_{yy}(x,y)=-2,\ f_{xy}(x,y)=2x-1$

$H(x,y)=(6x+2y)\cdot(-2)-(2x-1)^2$

・$H(0,0)=0\cdot(-2)-(-1)^2=-1<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)$：極値でない
・$H(-1,1)=(-4)\cdot(-2)-(-3)^2=-1<0 \qquad \therefore \quad f(-1,1)$：極値でない
・$H\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{8}\right)=\left(-\dfrac{9}{4}\right)\cdot(-2)-(-2)^2=\dfrac{1}{2}>0,\ f_{xx}\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{8}\right)=-\dfrac{9}{4}<0$

$$\therefore \quad f\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{64}\text{：極大値}$$

(2) $f(x,y)=3x^2y+y^3-3x^2-3y^2$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=6xy-6x=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=3x^2+3y^2-6y=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$6x(y-1)=0 \qquad \therefore \quad x=0$　または　$y=1$
$x=0$ のとき，② より

$$3y^2-6y=0$$
$$3y(y-2)=0 \qquad \therefore \quad y=0,2$$

$y=1$ のとき，② より

$$3x^2-3=0$$
$$x^2=1 \qquad \therefore \quad x=\pm 1$$

よって，停留点は　$(0,0),\ (0,2),\ (\pm 1,1)$

判定
$f_{xx}(x,y)=6y-6,\ f_{yy}(x,y)=6y-6,\ f_{xy}(x,y)=6x$

$H(x,y)=(6y-6)(6y-6)-(6x)^2$

・$H(0,0)=(-6)\cdot(-6)-0^2=36>0,\ f_{xx}(0,0)=-6<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)=0$：極大値

・$H(0,2)=6\cdot 6-0^2=36>0,\ f_{xx}(0,2)=6>0 \qquad \therefore \quad f(0,2)=-4$：極小値

・$H(\pm 1,1)=0\cdot 0-(\pm 6)^2=-36<0 \qquad \therefore \quad f(\pm 1,1)$：極値でない

(3) $f(x,y)=x^3+y^3+x^2+y^2+xy$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+2x+y=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=3y^2+2y+x=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より

$$3(x-y)(x+y)+(x-y)=0$$
$$(x-y)\{3(x+y)+1\}=0 \qquad \therefore \quad y=x \quad \text{または} \quad x+y=-\frac{1}{3}$$

(i) $y=x$ のとき，① より

$$3x^2+3x=0$$
$$x(x+1)=0 \qquad \therefore \quad x=0,-1$$

(ii) $x+y=-\dfrac{1}{3}$ のとき，①＋② より

$$3\{(x+y)^2-2xy\}+3(x+y)=0$$

$$3\left(\frac{1}{9}-2xy\right)-1=0 \qquad \therefore \quad xy=-\frac{1}{9}$$

これより，x, y は $t^2+\dfrac{1}{3}t-\dfrac{1}{9}=0$ すなわち $9t^2+3t-1=0$ の解となる（解と係数の関係）．

実際に解くと $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{6}$ となるから，簡単のため

$$\alpha=\frac{-1-\sqrt{5}}{6},\ \beta=\frac{-1+\sqrt{5}}{6}$$

とおく．このとき，$\alpha+\beta=-\dfrac{1}{3},\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{9}$ となることに注意する．

以上 (i),(ii) より，停留点は　$(0,0),\ (-1,-1),\ (\alpha,\beta),\ (\beta,\alpha)$

※① より $y=-3x^2-2x$ として，これを ② へ代入しても停留点を求めることはできる．

<u>判定</u>

$f_{xx}(x,y)=6x+2,\ f_{yy}(x,y)=6y+2,\ f_{xy}(x,y)=1$

$H(x,y)=(6x+2)\cdot(6y+2)-1^2=36xy+12(x+y)+3$

・$H(0,0)=2\cdot 2-1^2=3>0,\ f_{xx}(0,0)=2>0 \qquad \therefore \quad f(0,0)=0$：極小値

・$H(-1,-1)=(-4)\cdot(-4)-1^2=15>0,\ f_{xx}(-1,-1)=-4<0$

$\qquad \therefore \quad f(-1,-1)=1$：極大値

・$H(\alpha,\beta)=H(\beta,\alpha)=36\alpha\beta+12(\alpha+\beta)+3=-4-4+3=-5<0$

$\qquad \therefore \quad f(\alpha,\beta),\ f(\beta,\alpha)$：極値でない

【問題 3.1】

次の関数の停留点を求め，極値の判定をせよ．

(1) $f(x,y)=x^4+2x^2+y^3-3y$

(2) $f(x,y)=x^3-6xy+3y^2$

(3) $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$

(4) $f(x,y)=2x^4+y^2-2xy$

(5) $f(x,y)=x^4-4xy+2y^2+4x-4y$

(6) $f(x,y)=x^3y-3xy-y^2$

(7) $f(x,y)=3xy^2+y^3-6x^2-24x$

(8) $f(x,y)=x^2-2xy^2-y+2y^3$

(9) $f(x,y)=x^2-x^2y+2y^2-y^3$

(10) $f(x,y)=xy-x^2y-2xy^2$

(11) $f(x,y)=xy-x^2y-xy^3$

(12) $f(x,y)=x^3y+xy^3-xy$

(13) $f(x,y)=x^3+y^3-2x^2-2y^2+xy$

解答

(1) $f(x,y) = x^4 + 2x^2 + y^3 - 3y$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x^3 + 4x = 0 & \cdots ① \\ f_y(x,y) = 3y^3 - 3 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$4x(x^2+1) = 0$　　$\therefore$　$x = 0$（x は実数だから）
② より　$3(y^2-1) = 0$　　$\therefore$　$y = \pm 1$

よって，停留点は　$(0,1),\ (0,-1)$

判定

$f_{xx}(x,y) = 12x^2 + 4,\ f_{yy}(x,y) = 6y,\ f_{xy}(x,y) = 0$

$H(x,y) = (12x^2+4) \cdot 6y - 0^2$

・$H(0,1) = 4 \cdot 6 - 0^2 = 24 > 0,\ f_{xx}(0,1) = 4 > 0$　　$\therefore$　$f(0,1) = -2$：極小値

・$H(0,-1) = 4 \cdot (-6) - 0^2 = -24 < 0$　　$\therefore$　$f(0,-1)$：極値でない

(2) $f(x,y) = x^3 - 6xy + 3y^2$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 - 6y = 0 & \cdots ① \\ f_y(x,y) = -6x + 6y = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$y = x$
① へ代入すると

$$3x^2 - 6x = 0$$
$$3x(x-2) = 0 \qquad \therefore \quad x = 0, 2$$

$x = 0$ のとき，② より　$y = 0$
$x = 2$ のとき，② より　$y = 2$

よって，停留点は　$(0,0),\ (2,2)$

判定

$f_{xx}(x,y) = 6x,\ f_{yy}(x,y) = 6,\ f_{xy}(x,y) = -6$

$H(x,y) = 6x \cdot 6 - (-6)^2$

・$H(0,0) = 0 \cdot 6 - (-6)^2 = -36 < 0$　　$\therefore$　$f(0,0)$：極値でない

・$H(2,2) = 12 \cdot 6 - (-6)^2 = 36 > 0,\ f_{xx}(2,2) = 12 > 0$　　$\therefore$　$f(2,2) = -4$：極小値

(3) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x^3 - 4y = 0 & \cdots ① \\ f_y(x,y) = 4y^3 - 4x = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$y = x^3$

② へ代入すると

$$
\begin{aligned}
&4x^9-4x=0\\
&4x(x^8-1)=0 \qquad \therefore \quad x=0,\pm 1
\end{aligned}
$$

$x=0$ のとき，① より　$y=0$
$x=\pm 1$ のとき，① より　$y=\pm 1$（複号同順）

よって，停留点は　$(0,0),\ (\pm 1,\pm 1)$（複号同順）

判定
$f_{xx}(x,y)=12x^2,\ f_{yy}(x,y)=12y^2,\ f_{xy}(x,y)=-4$

$H(x,y)=12x^2\cdot 12y^2-(-4)^2$

・$H(0,0)=0\cdot 0-(-4)^2=-16<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)$：極値でない

・$H(\pm 1,\pm 1)=12\cdot 12-(-4)^2=128>0,\ f_{xx}(\pm 1,\pm 1)=12>0$

$$\therefore \quad f(\pm 1,\pm 1)=-2 \text{：極小値（複号同順）}$$

(4) $f(x,y)=2x^4+y^2-2xy$

停留点

$$
\begin{cases}
f_x(x,y)=8x^3-2y=0 & \cdots ①\\
f_y(x,y)=2y-2x=0 & \cdots ②
\end{cases}
$$

② より　$y=x$
① へ代入すると

$$
\begin{aligned}
&8x^3-2x=0\\
&2x(4x^2-1)=0 \qquad \therefore \quad x=0,\pm\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$x=0$ のとき，② より　$y=0$

$x=\pm\frac{1}{2}$ のとき，② より　$y=\pm\frac{1}{2}$（複号同順）

よって，停留点は　$(0,0),\ \left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$（複号同順）

判定
$f_{xx}(x,y)=24x^2,\ f_{yy}(x,y)=2,\ f_{xy}(x,y)=-2$

$H(x,y)=24x^2\cdot 2-(-2)^2$

・$H(0,0)=0\cdot 2-(-2)^2=-4<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)$：極値でない

・$H\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=6\cdot 2-(-2)^2=8>0,\ f_{xx}\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=6>0$

$$\therefore \quad f\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8} \text{：極小値（複号同順）}$$

(5) $f(x,y)=x^4-4xy+2y^2+4x-4y$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=4x^3-4y+4=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=-4x+4y-4=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$y=x+1$
① へ代入すると

$$\begin{aligned} &4x^3-4(x+1)+4=0 \\ &4x^3-4x=0 \\ &4x(x^2-1)=0 \qquad \therefore \quad x=0,\pm 1 \end{aligned}$$

$x=0$ のとき，② より　$y=1$
$x=1$ のとき，② より　$y=2$
$x=-1$ のとき，② より　$y=0$

よって，停留点は　$(0,1),\ (1,2),\ (-1,0)$

判定
$f_{xx}(x,y)=12x^2,\ f_{yy}(x,y)=4,\ f_{xy}(x,y)=-4$

$H(x,y)=12x^2\cdot 4-(-4)^2$

・$H(0,1)=0\cdot 4-(-4)^2=-16<0 \qquad \therefore \quad f(0,1)$：極値でない

・$H(1,2)=12\cdot 4-(-4)^2=32>0,\ f_{xx}(1,2)=12>0 \qquad \therefore \quad f(1,2)=-3$：極小値

・$H(-1,0)=12\cdot 4-(-4)^2=32>0,\ f_{xx}(-1,0)=12>0 \qquad \therefore \quad f(-1,0)=-3$：極小値

(6) $f(x,y)=x^3y-3xy-y^2$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2y-3y=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=x^3-3x-2y=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$y=\dfrac{x^3-3x}{2}$
① へ代入すると

$$\begin{aligned} &3x^2\cdot\frac{x^3-3x}{2}-3\cdot\frac{x^3-3x}{2}=0 \\ &x^2(x^3-3x)-(x^3-3x)=0 \\ &(x^3-3x)(x^2-1)=0 \\ &x(x^2-3)(x^2-1)=0 \qquad \therefore \quad x=0,\pm\sqrt{3},\pm 1 \end{aligned}$$

$x=0$ のとき，② より　$y=0$
$x=\pm\sqrt{3}$ のとき，② より　$y=0$
$x=\pm 1$ のとき，② より　$y=\mp 1$（複号同順）

よって，停留点は　$(0,0),\ (\pm\sqrt{3},0),\ (\pm 1,\mp 1)$（複号同順）

判定

$f_{xx}(x,y)=6xy,\ f_{yy}(x,y)=-2,\ f_{xy}(x,y)=3x^2-3$

$H(x,y)=6xy\cdot(-2)-(3x^2-3)^2$

・$H(0,0)=0\cdot(-2)-(-3)^2=-9<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)$：極値でない

・$H(\pm\sqrt{3},0)=0\cdot(-2)-6^2=-36<0 \qquad \therefore \quad f(\pm\sqrt{3},0)$：極値でない

・$H(\pm 1,\mp 1)=(-6)\cdot(-2)-0^2=12>0,\ f_{xx}(\pm 1,\mp 1)=-6<0$

$\qquad\qquad \therefore \quad f(\pm 1,\mp 1)=1$：極大値（複号同順）

(7) $f(x,y)=3xy^2+y^3-6x^2-24x$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3y^2-12x-24=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=6xy+3y^2=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$x=\dfrac{y^2-8}{4}$

② へ代入すると

$$6\cdot\frac{y^2-8}{4}\cdot y+3y^2=0$$
$$(y^2-8)y+2y^2=0$$
$$y(y^2+2y-8)=0$$
$$y(y-2)(y+4)=0 \qquad \therefore \quad y=0,2,-4$$

$y=0$ のとき，① より　$x=-2$
$y=2$ のとき，① より　$x=-1$
$y=-4$ のとき，① より　$x=2$

よって，停留点は　$(-2,0),\ (-1,2),\ (2,-4)$

判定

$f_{xx}(x,y)=-12,\ f_{yy}(x,y)=6x+6y,\ f_{xy}(x,y)=6y$

$H(x,y)=(-12)\cdot(6x+6y)-(6y)^2$

・$H(-2,0)=(-12)\cdot(-12)-0^2=144>0,\ f_{xx}(-2,0)=-12<0$

$\qquad\qquad \therefore \quad f(-2,0)=24$：極大値

・$H(-1,2)=(-12)\cdot 6-12^2=-216<0 \qquad \therefore \quad f(-1,2)$：極値でない

・$H(2,-4)=(-12)\cdot(-12)-(-24)^2=-432<0 \qquad \therefore \quad f(2,-4)$：極値でない

(8) $f(x,y)=x^2-2xy^2-y+2y^3$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2x-2y^2=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=-4xy-1+6y^2=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$x=y^2$

② へ代入すると

$$-4y^3-1+6y^2=0$$
$$4y^3-6y^2+1=0$$
$$(2y-1)(2y^2-2y-1)=0 \qquad \therefore \quad y=\frac{1}{2},\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

$y=\dfrac{1}{2}$ のとき，① より　$x=\dfrac{1}{4}$

$y=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ のとき，① より　$x=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$（複号同順）

よって，停留点は　$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2},\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}\right)$（複号同順）

判定

$f_{xx}(x,y)=2,\ f_{yy}(x,y)=-4x+12y,\ f_{xy}(x,y)=-4y$

$H(x,y)=2\cdot(-4x+12y)-(-4y)^2$

・$H\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)=2\cdot 5-(-2)^2=6>0,\ f_{xx}\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)=2>0$

$$\therefore \quad f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{16}$$ ：極小値

・$H\left(\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2},\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}\right)=2\cdot(2\pm 4\sqrt{3})-(-2\mp 2\sqrt{3})^2=-12<0$

$$\therefore \quad f\left(\frac{2\pm\sqrt{3}}{2},\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\right)$$ ：極値でない（複号同順）

(9) $f(x,y)=x^2-x^2y+2y^2-y^3$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2x-2xy=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=-x^2+4y-3y^2=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$2x(1-y)=0 \qquad \therefore \quad x=0$　または　$y=1$

$x=0$ のとき，② より

$$4y-3y^2=0$$
$$y(4-3y)=0 \qquad \therefore \quad y=0,\frac{4}{3}$$

$y=1$ のとき，② より

$$-x^2+1=0$$
$$x^2=1 \qquad \therefore \quad x=\pm 1$$

よって，停留点は　$(0,0)$, $\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$, $(\pm 1,1)$

判定

$f_{xx}(x,y)=2-2y,\ f_{yy}(x,y)=4-6y,\ f_{xy}(x,y)=-2x$

$H(x,y)=(2-2y)(4-6y)-(-2x)^2$

・$H(0,0)=2\cdot 4-0^2=8>0,\ f_{xx}(0,0)=2>0 \qquad \therefore \quad f(0,0)=0$：極小値

・$H\left(0,\dfrac{4}{3}\right)=\left(-\dfrac{2}{3}\right)\cdot(-4)-0^2=\dfrac{8}{3}>0,\ f_{xx}\left(0,\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}<0$

$$\therefore \quad f\left(0,\frac{4}{3}\right)=\frac{32}{27}：極大値$$

・$H(\pm 1,1)=0\cdot(-2)-(\mp 2)^2=-4<0 \qquad \therefore \quad f(\pm 1,1)$：極値でない

(10) $f(x,y)=xy-x^2y-2xy^2$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=y-2xy-2y^2=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=x-x^2-4xy=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$x(1-x-4y)=0 \qquad \therefore \quad x=0$　または　$x=1-4y$

$x=0$ のとき，① より

$$y-2y^2=0$$
$$y(1-2y)=0 \qquad \therefore \quad y=0,\frac{1}{2}$$

$x=1-4y \quad \cdots ③$ のとき，① より

$$y(1-2x-2y)=0$$
$$y\{1-2(1-4y)-2y\}=0$$
$$y(6y-1)=0 \qquad \therefore \quad y=0,\frac{1}{6}$$

$y=0$ のとき，③ より　$x=1$

$y=\dfrac{1}{6}$ のとき，③ より　$x=\dfrac{1}{3}$

よって，停留点は　$(0,0),\ \left(0,\dfrac{1}{2}\right),\ (1,0),\ \left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6}\right)$

判定

$f_{xx}(x,y)=-2y,\ f_{yy}(x,y)=-4x,\ f_{xy}(x,y)=1-2x-4y$

$H(x,y)=(-2y)\cdot(-4x)-(1-2x-4y)^2$

・$H(0,0)=0\cdot 0-1^2=-1<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)$：極値でない

・$H\left(0,\dfrac{1}{2}\right)=(-1)\cdot 0-(-1)^2=-1<0 \qquad \therefore \quad f\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$：極値でない

・$H(1,0)=0\cdot(-4)-(-1)^2=-1<0 \qquad \therefore \quad f(1,0)$：極値でない

・$H\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6}\right)=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{3}>0,\ f_{xx}\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6}\right)=-\dfrac{1}{3}<0$

$$\therefore \quad f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{54}：極大値$$

(11) $f(x,y)=xy-x^2y-xy^3$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=y-2xy-y^3=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=x-x^2-3xy^2=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$x(1-x-3y^2)=0 \qquad \therefore \quad x=0$　または　$x=1-3y^2$
$x=0$ のとき，① より

$$y-y^3=0$$
$$y(1-y^2)=0 \qquad \therefore \quad y=0,\pm 1$$

$x=1-3y^2 \quad \cdots ③$ のとき，① より

$$y(1-2x-y^2)=0$$
$$y\{1-2(1-3y^2)-y^2\}=0$$
$$y(5y^2-1)=0 \qquad \therefore \quad y=0,\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$y=0$ のとき，③ より　$x=1$

$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，③ より　$x=\dfrac{2}{5}$

よって，停留点は　$(0,0),\ (0,\pm 1),\ (1,0),\ \left(\dfrac{2}{5},\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

判定

$f_{xx}(x,y)=-2y,\ f_{yy}(x,y)=-6xy,\ f_{xy}(x,y)=1-2x-3y^2$

$H(x,y)=(-2y)\cdot(-6xy)-(1-2x-3y^2)^2$

・$H(0,0)=0\cdot 0-1^2=-1<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)$：極値でない

・$H(0,\pm 1)=(\mp 2)\cdot 0-(-2)^2=-4<0 \qquad \therefore \quad f(0,\pm 1)$：極値でない

・$H(1,0)=0\cdot 0-(-1)^2=-1<0 \qquad \therefore \quad f(1,0)$：極値でない

・$H\left(\dfrac{2}{5},\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\left(\mp\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\mp\dfrac{12}{5\sqrt{5}}\right)-\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{4}{5}>0$

$$f_{xx}\left(\frac{2}{5},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{5}}<0 \qquad \therefore \quad f\left(\frac{2}{5},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{4}{25\sqrt{5}}\text{：極大値}$$

$$f_{xx}\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}>0 \qquad \therefore \quad f\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{4}{25\sqrt{5}}\text{：極小値}$$

(12) $f(x,y)=x^3y+xy^3-xy$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2y+y^3-y=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=x^3+3xy^2-x=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$y(3x^2+y^2-1)=0 \qquad \therefore \quad y=0$　または　$y^2=1-3x^2$
$y=0$ のとき，② より

$$x^3-x=0$$

$$x(x^2-1)=0 \qquad \therefore \quad x=0, \pm 1$$

$y^2 = 1-3x^2 \quad \cdots ③$ のとき，② より

$$x(x^2+3y^2-1)=0$$
$$x\{x^2+3(1-3x^2)-1\}=0$$
$$x(2-8x^2)=0 \qquad \therefore \quad x=0, \pm\frac{1}{2}$$

$x=0$ のとき，③ より　$y^2=1 \qquad \therefore \quad y=\pm 1$

$x=\pm\dfrac{1}{2}$ のとき，③ より　$y^2=\dfrac{1}{4} \qquad \therefore \quad y=\pm\dfrac{1}{2}$（複号任意）

よって，停留点は　$(0,0),\ (\pm 1,0),\ (0,\pm 1),\ \left(\pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{2}\right)$（複号任意）

判定

$f_{xx}(x,y)=6xy,\ f_{yy}(x,y)=6xy,\ f_{xy}(x,y)=3x^2+3y^2-1$

$H(x,y)=6xy\cdot 6xy-(3x^2+3y^2-1)^2$

・$H(0,0)=0\cdot 0-(-1)^2=-1<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)$：極値でない

・$H(\pm 1,0)=H(0,\pm 1)=0\cdot 0-2^2=-4<0 \qquad \therefore \quad f(\pm 1,0),\ f(0,\pm 1)$：極値でない

・$H\left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=2>0,\ f_{xx}\left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}>0$

$$\therefore \quad f\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$$：極小値（複号同順）

・$H\left(\pm\dfrac{1}{2},\mp\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=2>0,\ f_{xx}\left(\pm\dfrac{1}{2},\mp\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}<0$

$$\therefore \quad f\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$：極大値（複号同順）

(13) $f(x,y)=x^3+y^3-2x^2-2y^2+xy$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2-4x+y=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=3y^2-4y+x=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より

$$3(x-y)(x+y)-5(x-y)=0$$
$$(x-y)\{3(x+y)-5\}=0 \qquad \therefore \quad y=x \quad \text{または} \quad x+y=\frac{5}{3}$$

(i) $y=x$ のとき，① より

$$3x^2-3x=0$$
$$x(x-1)=0 \qquad \therefore \quad x=0,1$$

(ii) $x+y=\dfrac{5}{3}$ のとき，① + ② より

$$3\{(x+y)^2-2xy\}-3(x+y)=0$$

$$3\left(\frac{25}{9}-2xy\right)-5=0 \qquad \therefore \quad xy=\frac{5}{9}$$

これより，x, y は $t^2-\frac{5}{3}t+\frac{5}{9}=0$ すなわち $9t^2-15t+5=0$ の解となる（解と係数の関係）．

実際に解くと $t=\frac{5\pm\sqrt{5}}{6}$ となるから，簡単のため

$$\alpha=\frac{5-\sqrt{5}}{6},\ \beta=\frac{5+\sqrt{5}}{6}$$

とおく．このとき，$\alpha+\beta=\frac{5}{3},\ \alpha\beta=\frac{5}{9}$ となることに注意する．

以上 (i),(ii) より，停留点は　$(0,0),\ (1,1),\ (\alpha,\beta),\ (\beta,\alpha)$

※① より $y=-3x^2+4x$ として，これを ② へ代入しても停留点を求めることはできる．

判定

$f_{xx}(x,y)=6x-4,\ f_{yy}(x,y)=6y-4,\ f_{xy}(x,y)=1$

$H(x,y)=(6x-4)(6y-4)-1^2=36xy-24(x+y)+15$

・$H(0,0)=(-4)\cdot(-4)-1^2=15>0,\ f_{xx}(0,0)=-4<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)=0$：極大値

・$H(1,1)=2\cdot 2-1^2=3>0,\ f_{xx}(1,1)=2>0 \qquad \therefore \quad f(1,1)=-1$：極小値

・$H(\alpha,\beta)=H(\beta,\alpha)=36\alpha\beta-24(\alpha+\beta)+15=20-40+15=-5<0$

$$\therefore \quad f(\alpha,\beta),\ f(\beta,\alpha)\text{：極値でない}$$

§4.　2 変数関数の積分

★重積分，累次積分

立体図形を直方体で近似するという考え方により，**重積分**

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

の定義をしたが，計算するためには**累次積分**

$$\int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx$$

に直さなければならない（重積分の累次積分への直し方は後で扱う）．まずは累次積分の計算をしてみよう．累次積分とは，順番に積分するということである．

【例題】

次の累次積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 x^3 y dy \right) dx$　　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^x xy dy \right) dx$

解答

(1)
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 x^3 y dy \right) dx &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{2} y^2 \right]_{y=1-x}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^3}{2} \{1-(1-x)^2\} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^3}{2}(2x - x^2) dx \\
&= \int_0^1 \left(x^4 - \frac{x^5}{2} \right) dx \\
&= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{12} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{5} - \frac{1}{12} \\
&= \frac{7}{60}
\end{aligned}$$

※ $\displaystyle\int_{1-x}^1 x^3 y \, \underset{\sim\sim}{dy}$ において，$\underset{\sim\sim}{dy}$ は $x^3 y$ を y で積分することを表しているから，$x^3 y$ を y で積分した $\dfrac{x^3}{2} y^2$ に $y = 1,\ 1-x$ を代入して引き算している．

※内側の積分を抜き出して

$$\int_{1-x}^1 x^3 y dy = \left[\frac{x^3}{2} y^2 \right]_{y=1-x}^{y=1} = \cdots = x^4 - \frac{x^5}{2}$$

と計算してから，これを与式へ戻して

$$\int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 x^3 y dy\right) dx = \int_0^1 \left(x^4 - \frac{x^5}{2}\right) dx = \cdots = \frac{7}{60}$$

というように計算してもよい.

(2)
$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^x xydy\right) dx &= \int_1^2 \left[\frac{x}{2}y^2\right]_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} dx \\
&= \int_1^2 \frac{x}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^4}{8} - \frac{1}{2}\log x\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{8}(16-1) - \frac{1}{2}(\log 2 - 0) \\
&= \frac{15}{8} - \frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}$$

【問題 4.1】

次の累次積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x^3 y dy\right) dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^2 x^2 y dy\right) dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(\int_x^{x+1} y^2 dy\right) dx$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^3 \left(\int_{x^2}^{2x+3} xydy\right) dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{2x+1} xdy\right) dx$

(6) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^{4-x} xdy\right) dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \left\{\int_0^{1-x} (2x+3y^2) dy\right\} dx$

(8) $\displaystyle\int_0^1 \left\{\int_{x^2+1}^{x+1} (x^2+2y) dy\right\} dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{\int_0^{1-2x} (x^2+2y^2) dy\right\} dx$

(10) $\displaystyle\int_3^6 \left(\int_1^{x^2} \frac{x}{y^2} dy\right) dx$

(11) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_{e^x}^{e^2} \frac{1}{xy} dy\right) dx$

(12) $\displaystyle\int_1^3 \left\{\int_1^x \frac{1}{(x+y)^2} dy\right\} dx$

(13) $\displaystyle\int_0^1 \left\{\int_0^{x^2} \frac{x^2+1}{(y+1)^3} dy\right\} dx$

(14) $\displaystyle\int_0^{\frac{4}{3}} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{2-x} \sqrt{2y-x}\, dy\right) dx$

(15) $\displaystyle\int_1^5 \left(\int_1^x \log\frac{y}{x} dy\right) dx$

(16) $\displaystyle\int_3^5 \left(\int_2^x \frac{x}{y} dy\right) dx$

(17) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{\frac{1}{x}}^{2}x^2e^{xy}dy\right)dx$

(18) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}}\left(\int_{x}^{x^2}\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx$

解答

(1)
$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^{1-x}x^3ydy\right)dx &= \int_0^1\left[\frac{x^3}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x}dx\\ &= \int_0^1\frac{x^3}{2}(1-x)^2dx\\ &= \int_0^1\left(\frac{x^3}{2}-x^4+\frac{x^5}{2}\right)dx\\ &= \left[\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{12}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{8}-\frac{1}{5}+\frac{1}{12}\\ &= \frac{1}{120}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_x^{2}x^2ydy\right)dx &= \int_0^1\left[\frac{x^2}{2}y^2\right]_{y=x}^{y=2}dx\\ &= \int_0^1\frac{x^2}{2}(4-x^2)dx\\ &= \int_0^1\left(2x^2-\frac{x^4}{2}\right)dx\\ &= \left[\frac{2}{3}x^3-\frac{x^5}{10}\right]_0^1\\ &= \frac{2}{3}-\frac{1}{10}\\ &= \frac{17}{30}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int_{-1}^2\left(\int_x^{x+1}y^2dy\right)dx &= \int_{-1}^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=x}^{y=x+1}dx\\ &= \int_{-1}^2\frac{1}{3}\left\{(x+1)^3-x^3\right\}dx\\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}(x+1)^4-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^2\\ &= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{4}(81-0)-\frac{1}{4}(16-1)\right\}\\ &= \frac{11}{2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(4)\quad \int_{-1}^{3}\left(\int_{x^2}^{2x+3} xydy\right)dx &= \int_{-1}^{3}\left[\frac{x}{2}y^2\right]_{y=x^2}^{y=2x+3} dx \\
&= \int_{-1}^{3}\frac{x}{2}\left\{(2x+3)^2-x^4\right\}dx \\
&= \int_{-1}^{3}\left(-\frac{x^5}{2}+2x^3+6x^2+\frac{9}{2}x\right)dx \\
&= \left[-\frac{x^6}{12}+\frac{x^4}{2}+2x^3+\frac{9}{4}x^2\right]_{-1}^{3} \\
&= -\frac{1}{12}(729-1)+\frac{1}{2}(81-1)+2\{27-(-1)\}+\frac{9}{4}(9-1) \\
&= \frac{160}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(5)\quad \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{2x+1} xdy\right)dx &= \int_{0}^{1}\left[xy\right]_{y=0}^{y=2x+1}dx \\
&= \int_{0}^{1} x(2x+1)dx \\
&= \int_{0}^{1}(2x^2+x)dx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{2}{3}+\frac{1}{2} \\
&= \frac{7}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(6)\quad \int_{1}^{2}\left(\int_{0}^{4-x} xdy\right)dx &= \int_{1}^{2}\left[xy\right]_{y=0}^{y=4-x}dx \\
&= \int_{1}^{2} x(4-x)dx \\
&= \int_{1}^{2}(4x-x^2)dx \\
&= \left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2} \\
&= 2(4-1)-\frac{1}{3}(8-1) \\
&= \frac{11}{3}
\end{aligned}
$$

$$(7)\quad \int_0^1 \left\{\int_0^{1-x} (2x+3y^2)dy\right\} dx = \int_0^1 \Big[2xy+y^3\Big]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{2x(1-x)+(1-x)^3\right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{2x-2x^2+(1-x)^3\right\} dx$$

$$= \left[x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}(1-x)^4\right]_0^1$$

$$= 1-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}(0-1)$$

$$= \frac{7}{12}$$

$$(8)\quad \int_0^1 \left\{\int_{x^2+1}^{x+1} (x^2+2y)dy\right\} dx = \int_0^1 \Big[x^2y+y^2\Big]_{y=x^2+1}^{y=x+1} dx$$

$$= \int_0^1 \Big[x^2\big\{(x+1)-(x^2+1)\big\}+\big\{(x+1)^2-(x^2+1)^2\big\}\Big] dx$$

$$= \int_0^1 (-2x^4+x^3-x^2+2x)dx$$

$$= \left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1$$

$$= \frac{31}{60}$$

$$(9)\quad \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{\int_0^{1-2x} (x^2+2y^2)dy\right\} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[x^2y+\frac{2}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1-2x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{x^2(1-2x)+\frac{2}{3}(1-2x)^3\right\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{x^2-2x^3+\frac{2}{3}(1-2x)^3\right\} dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{2}{3}\cdot\left\{\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{4}(1-2x)^4\right\}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{24}-\frac{1}{32}-\frac{1}{12}(0-1)$$

$$= \frac{3}{32}$$

$$
\begin{aligned}
(10)\quad \int_3^6 \left(\int_1^{x^2} \frac{x}{y^2}dy\right)dx &= \int_3^6 \left[-\frac{x}{y}\right]_{y=1}^{y=x^2} dx \\
&= \int_3^6 -x\left(\frac{1}{x^2}-1\right)dx \\
&= \int_3^6 \left(-\frac{1}{x}+x\right)dx \\
&= \left[-\log|x|+\frac{x^2}{2}\right]_3^6 \\
&= -(\log 6-\log 3)+\frac{1}{2}(36-9) \\
&= -\log 2+\frac{27}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(11)\quad \int_1^2 \left(\int_{e^x}^{e^2} \frac{1}{xy}dy\right)dx &= \int_1^2 \left[\frac{\log y}{x}\right]_{y=e^x}^{y=e^2} dx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{x}(2-x)dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)dx \\
&= \Big[2\log x-x\Big]_1^2 \\
&= 2(\log 2-0)-(2-1) \\
&= 2\log 2-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(12)\quad \int_1^3 \left\{\int_1^x \frac{1}{(x+y)^2}dy\right\}dx &= \int_1^3 \left[-\frac{1}{x+y}\right]_{y=1}^{y=x} dx \\
&= \int_1^3 -\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}\log x+\log(x+1)\right]_1^3 \\
&= -\frac{1}{2}(\log 3-0)+(\log 4-\log 2) \\
&= -\frac{1}{2}\log 3+\log 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(13)\quad \int_0^1 \left\{\int_0^{x^2} \frac{x^2+1}{(y+1)^3}dy\right\}dx &= \int_0^1 \left[-\frac{x^2+1}{2(y+1)^2}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx \\
&= \int_0^1 -\frac{x^2+1}{2}\left\{\frac{1}{(x^2+1)^2}-1\right\}dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(x^2+1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}+x-\arctan x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}+1-\left(\frac{\pi}{4}-0\right)\right\} \\
&= \frac{2}{3}-\frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(14)\quad \int_0^{\frac{4}{3}} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{2-x} \sqrt{2y-x}\,dy\right)dx &= \int_0^{\frac{4}{3}} \left\{\int_{\frac{x}{2}}^{2-x} (2y-x)^{\frac{1}{2}}dy\right\}dx \\
&= \int_0^{\frac{4}{3}} \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2y-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{y=\frac{x}{2}}^{y=2-x} dx \\
&= \int_0^{\frac{4}{3}} \frac{1}{3}\left\{(4-3x)^{\frac{3}{2}}-0\right\}dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{4}{3}} (4-3x)^{\frac{3}{2}}dx \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{-3}\cdot\frac{2}{5}(4-3x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\frac{4}{3}} \\
&= -\frac{2}{45}(0-32) \\
&= \frac{64}{45}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(15)\quad \int_1^5 \left(\int_1^x \log \frac{y}{x} dy \right) dx &= \int_1^5 \left\{ \int_1^x (\log y - \log x) dy \right\} dx \\
&= \int_1^5 \Big[(y \log y - y) - y \log x \Big]_{y=1}^{y=x} dx \\
&= \int_1^5 \big\{ (x \log x - 1 \cdot 0) - (x-1) - (x-1) \log x \big\} dx \\
&= \int_1^5 \big\{ \log x - (x-1) \big\} dx \\
&= \left[(x \log x - x) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \right]_1^5 \\
&= (5 \log 5 - 1 \cdot 0) - (5-1) - \frac{1}{2}(16-0) \\
&= 5 \log 5 - 12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(16)\quad \int_3^5 \left(\int_2^x \frac{x}{y} dy \right) dx &= \int_3^5 \Big[x \log y \Big]_{y=2}^{y=x} dx \\
&= \int_3^5 x(\log x - \log 2) dx \\
&= \int_3^5 (x \log x - x \log 2) dx \\
&= \left(\left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_3^5 - \frac{1}{2} \int_3^5 x dx \right) - \left[\frac{x^2}{2} \log 2 \right]_3^5 \\
&= \frac{1}{2}(25 \log 5 - 9 \log 3) - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_3^5 - \frac{1}{2}(25-9) \log 2 \\
&= \frac{25}{2} \log 5 - \frac{9}{2} \log 3 - \frac{1}{4}(25-9) - 8 \log 2 \\
&= \frac{25}{2} \log 5 - \frac{9}{2} \log 3 - 8 \log 2 - 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\log x & & \dfrac{x^2}{2} \\
\dfrac{1}{x} & & x
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(17)\quad \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{\frac{1}{x}}^{2} x^2 e^{xy}dy\right)dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big[xe^{xy}\Big]_{y=\frac{1}{x}}^{y=2}dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} x(e^{2x}-e)dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1}(xe^{2x}-ex)dx \\
&= \left(\left[\frac{x}{2}e^{2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{2x}dx\right) - \left[\frac{e}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\left(1\cdot e^2 - \frac{1}{2}\cdot e\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{e}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e}{4} - \frac{1}{4}(e^2-e) - \frac{3e}{8} \\
&= \frac{e^2}{4} - \frac{3e}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
x & & \frac{1}{2}e^{2x} \\
1 & & e^{2x}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(18)\quad & \int_{1}^{\sqrt{3}}\left(\int_{x}^{x^2}\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx \\
&= \int_{1}^{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{y}{x}\right]_{y=x}^{y=x^2}dx \\
&= \int_{1}^{\sqrt{3}}\left(\arctan x - \frac{\pi}{4}\right)dx \\
&= \left(\Big[x\arctan x\Big]_{1}^{\sqrt{3}} - \int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{x}{1+x^2}dx\right) - \frac{\pi}{4}\Big[x\Big]_{1}^{\sqrt{3}} \\
&= \left(\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - 1\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{2x}{1+x^2}dx - \frac{\pi}{4}(\sqrt{3}-1) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_{1}^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{2}(\log 4 - \log 2) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\arctan x & & x \\
\frac{1}{1+x^2} & & 1
\end{array}
$$

★重積分の累次積分への変更

(1) $g_1, g_2 : [a,b]$ で連続，$a \leqq x \leqq b$ で $g_1(x) \leqq g_2(x)$
$D : a \leqq x \leqq b,\ g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)$　（縦線型領域）
$f : D$ で連続

$$\Longrightarrow \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right\} dx$$

(2) $h_1, h_2 : [c,d]$ で連続，$c \leqq y \leqq d$ で $h_1(y) \leqq h_2(y)$
$D : c \leqq y \leqq d,\ h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)$　（横線型領域）
$f : D$ で連続

$$\Longrightarrow \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right\} dy$$

★積分の順序変更

上の (1),(2) において

$$\int_a^b \left\{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right\} dx = \int_c^d \left\{\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right\} dy$$

☆積分の順序変更は次のようにする．
(1) 累次積分から積分領域の式を復元する．
(2) 積分領域を図示する．
(3) 積分領域の「型」を見直して，式も書き直す．
(4) 書き直した積分領域の式から累次積分に戻す．

【例題】
次の積分順序を変更せよ．

$$\int_1^2 \left\{\int_{x-1}^{1} f(x,y)dy\right\} dx$$

解答

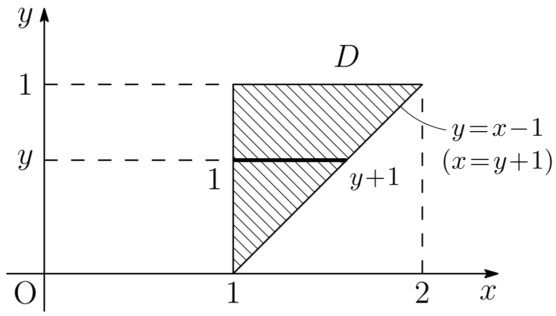
上で述べた順序変更のやり方 (1) 〜 (4) の順に従う．
(1) 累次積分の形から，積分領域は

$$D : 1 \leqq x \leqq 2,\ x-1 \leqq y \leqq 1 \qquad \text{（縦線型領域）}$$

である．

(2) x の範囲は 1 から 2 で，2 直線 $y = x-1$ と $y = 1$ の間だから，積分領域 D は図の斜線部となる．

(3) 斜線部より，y の範囲が 0 から 1 であることが読み取れる．y をこの範囲から適当にとり，そこから斜線部に**横線**を引いたものが図の太線である．この太線における x の範囲を求めよう．左端は 1 である．右端は直線 $y = x - 1$ 上にあり，この式は $x = y+1$ と書き直すことができるから，右端は $y + 1$ である．よって，積分領域は



$$D : 0 \leqq y \leqq 1,\ 1 \leqq x \leqq y+1 \qquad \text{（横線型領域）}$$

ともかける．

(4) (3) の積分領域から累次積分に戻せば，積分の順序変更が完成する．

$$\int_1^2 \left\{ \int_{x-1}^1 f(x,y)dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_1^{y+1} f(x,y)dx \right\} dy$$

【問題 4.2】
次の積分順序を変更せよ．ただし，1 つの累次積分で表せるとは限らず，複数の累次積分で表さなければならないときもある．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left\{ \int_0^{1-x} f(x,y)dy \right\} dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^3 \left\{ \int_1^{2x-1} f(x,y)dy \right\} dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{1-x}^{x+1} f(x,y)dy \right\} dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{x^2-1}^{x} f(x,y)dy \right\} dx$

解答

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left\{ \int_0^{1-x} f(x,y)dy \right\} dx$

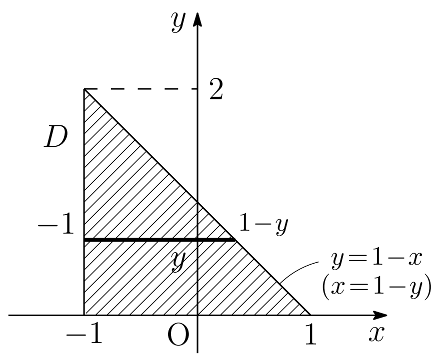
積分領域は

$$D : -1 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 - x$$

であるが，これは

$$D : 0 \leqq y \leqq 2,\ -1 \leqq x \leqq 1 - y$$

でもあるから



$$\int_{-1}^1 \left\{ \int_0^{1-x} f(x,y)dy \right\} dx = \int_0^2 \left\{ \int_{-1}^{1-y} f(x,y)dx \right\} dy$$

(2) $\displaystyle\int_1^3 \left\{ \int_1^{2x-1} f(x,y)dy \right\} dx$

積分領域は

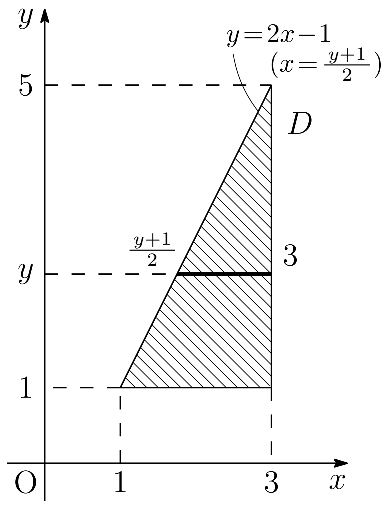
$$D : 1 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 2x-1$$

であるが，これは

$$D : 1 \leqq y \leqq 5,\ \frac{y+1}{2} \leqq x \leqq 3$$

でもあるから

$$\int_1^3 \left\{ \int_1^{2x-1} f(x,y)dy \right\} dx = \int_1^5 \left\{ \int_{\frac{y+1}{2}}^3 f(x,y)dx \right\} dy$$



(3) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{1-x}^{x+1} f(x,y)dy \right\} dx$

積分領域は

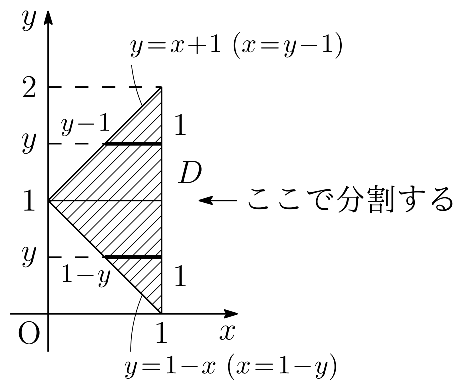
$$D : 0 \leqq x \leqq 1,\ 1-x \leqq y \leqq x+1$$

であるが，これは

$$D_1 : 0 \leqq y \leqq 1,\ 1-y \leqq x \leqq 1$$

$$D_2 : 1 \leqq y \leqq 2,\ y-1 \leqq x \leqq 1$$

をあわせたものでもあるから



$$\int_0^1 \left\{ \int_{1-x}^{x+1} f(x,y)dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_{1-y}^1 f(x,y)dx \right\} dy + \int_1^2 \left\{ \int_{y-1}^1 f(x,y)dx \right\} dy$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{x^2-1}^{x} f(x,y)dy \right\} dx$

積分領域は

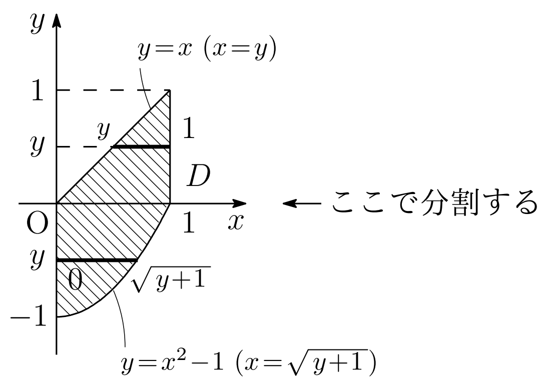
$$D : 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2-1 \leqq y \leqq x$$

であるが，これは

$$D_1 : -1 \leqq y \leqq 0,\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{y+1}$$

$$D_2 : 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 1$$

をあわせたものでもあるから

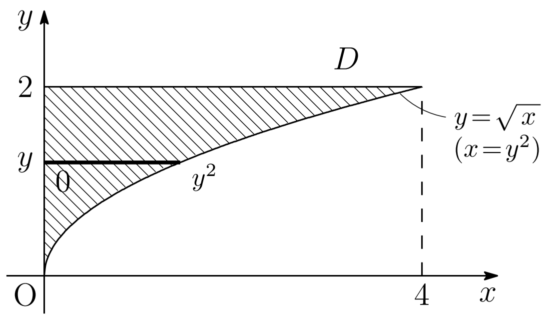


$$\int_0^1 \left\{ \int_{x^2-1}^{x} f(x,y)dy \right\} dx = \int_{-1}^0 \left\{ \int_0^{\sqrt{y+1}} f(x,y)dx \right\} dy + \int_0^1 \left\{ \int_y^1 f(x,y)dx \right\} dy$$

【問題 4.3】
積分の順序変更により，次の積分を求めよ．

$$\int_0^4 \left\{ \int_{\sqrt{x}}^2 (y^3+1)^{-\frac{5}{2}} dy \right\} dx$$

解答



積分領域は

$$D: 0 \leqq x \leqq 4,\ \sqrt{x} \leqq y \leqq 2$$

であるが，これは

$$D: 0 \leqq y \leqq 2,\ 0 \leqq x \leqq y^2$$

でもあるから

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \left\{ \int_{\sqrt{x}}^2 (y^3+1)^{-\frac{5}{2}} dy \right\} dx &= \int_0^2 \left\{ \int_0^{y^2} (y^3+1)^{-\frac{5}{2}} dx \right\} dy \\
&= \int_0^2 \left[x(y^3+1)^{-\frac{5}{2}} \right]_{x=0}^{x=y^2} dy \\
&= \int_0^2 y^2(y^3+1)^{-\frac{5}{2}} dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^2 (y^3+1)^{-\frac{5}{2}} \cdot 3y^2 dy \\
&= \frac{1}{3}\left[-\frac{2}{3}(y^3+1)^{-\frac{3}{2}} \right]_0^2 \\
&= -\frac{2}{9}\left(\frac{1}{27} - 1 \right) \\
&= \frac{52}{243}
\end{aligned}$$

★変数変換の公式
極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} r \geqq 0 \\ \theta : 1\ \text{周分} \end{array} \right)$$

により，(r,θ) 領域 D' が (x,y) 領域 D へうつされるとき，D で連続な関数 f に対して

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot \boldsymbol{r} dr d\theta$$

が成り立つ．

☆ (x,y) 領域 D に対して，(r,θ) 領域 D' は次のように求める．

①：D を図示する．

②：D 内に点 (x,y) をとる．

③：原点と ② の点を結び，さらに境界まで伸ばす．

④：③ の線分が原点のまわりで動ける範囲をかく．

⑤：④ から θ の範囲を求める．

⑥：③ から r の範囲を求める．

※ D の図示が困難なときでも，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$（$r \geqq 0,\ \theta : 1$ 周分）を D の式に代入して，r,θ の連立不等式を解けば D' を求めることができる．

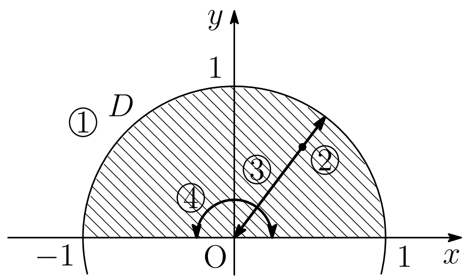
【例題】

(1) $D : x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0$

は図の斜線部である．④, ③ から範囲を求めれば

$$D' : 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq r \leqq 1$$

であることがわかる．

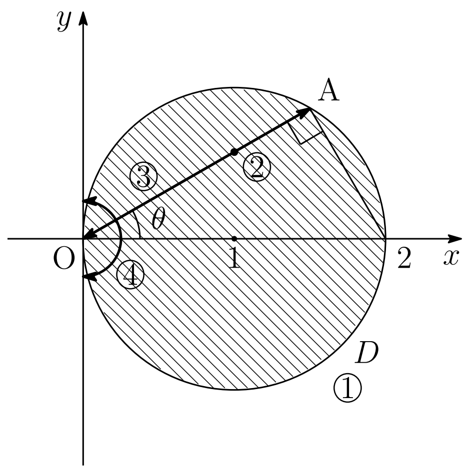


(2) $D : x^2+y^2 \leqq 2x$

は図の斜線部である．$\mathrm{OA}=2\cos\theta$ であることに注意して ④, ③ から範囲を求めれば

$$D' : -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta$$

であることがわかる．



【公式】

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ \dfrac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 1}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n=2,4,6,\ldots) \\ \dfrac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 2}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3}\cdot 1 & (n=3,5,7,\ldots) \end{cases}$$

証明

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ において，$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = -1, \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & \to & 0 \end{array}$$

であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cdot (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$$

よって，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ について示せばよい．

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ とおくと

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

である．また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos x dx \\ &= \Big[\cos^{n-1} x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\ &= (0 \cdot 1 - 1 \cdot 0) + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x(1 - \cos^2 x) dx \\ &= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx\right) \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \cos^{n-1} x \arrow[d] & \sin x \\ (n-1)\cos^{n-2} x \cdot (-\sin x) & \cos x \arrow[u] \end{tikzcd}$$

であるから，漸化式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2)$$

が得られる．よって，$n = 2, 4, 6, \ldots$ のとき

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\ &\vdots \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} I_0 \\ &= \frac{(n-1) \cdot (n-3) \cdot \cdots \cdot 1}{n \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

また，$n = 3, 5, 7, \ldots$ のとき

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\
&\vdots \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} I_1 \\
&= \frac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 2}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3} \cdot 1 \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

【問題 4.4】

極座標変換により，次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+8}} dxdy \qquad (D : x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0)$

(2) $\displaystyle\int\int_D \log(x^2+y^2) dxdy \qquad (D : 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(3) $\displaystyle\int\int_D y^2 dxdy \qquad (D : x^2+y^2 \leqq 2x)$

(4) $\displaystyle\int\int_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy \qquad (D : x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0)$

(5) $\displaystyle\int\int_D x^2 dxdy \qquad (D : x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(6) $\displaystyle\int\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dxdy \qquad (D : x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(7) $\displaystyle\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy \qquad (D : x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(8) $\displaystyle\int\int_D y dxdy \qquad (D : x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

解答

(1) $$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+8}}dxdy \qquad (D: x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0)$$

$$= \int\int_{D'} \frac{1}{\sqrt{r^2+8}}\cdot rdrd\theta \qquad (D': 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq r \leqq 1)$$

$$= \int\int_{D'} \frac{r}{\sqrt{r^2+8}}drd\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{r^2+8}}dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 (r^2+8)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2rdr\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\Big[2(r^2+8)^{\frac{1}{2}}\Big]_{r=0}^{r=1}d\theta$$

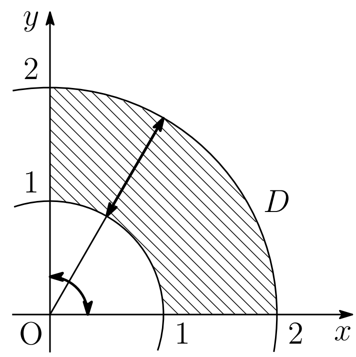
$$= \int_0^{\pi}\big(3-2\sqrt{2}\big)d\theta$$

$$= \big(3-2\sqrt{2}\big)\big[\theta\big]_0^{\pi}$$

$$= \big(3-2\sqrt{2}\big)\pi$$

(2) $$\int\int_D \log(x^2+y^2)dxdy \qquad (D: 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$$

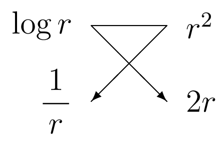
$$= \int\int_{D'} \log r^2 \cdot rdrd\theta \qquad \left(D': 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 1 \leqq r \leqq 2\right)$$



$$= \int\int_{D'} 2r\log r drd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_1^2 2r\log r dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\Big[r^2\log r\Big]_{r=1}^{r=2} - \int_1^2 rdr\right)d\theta$$



$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{(4\log 2 - 1\cdot 0) - \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=1}^{r=2}\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{4\log 2 - \frac{1}{2}(4-1)\right\}d\theta$$

$$= \left(4\log 2 - \frac{3}{2}\right)\big[\theta\big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(4\log 2 - \frac{3}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \left(2\log 2 - \frac{3}{4}\right)\pi$$

(3) $\displaystyle\iint_D y^2 dxdy \qquad (D : x^2+y^2 \leqq 2x)$

$$= \iint_{D'} r^2\sin^2\theta\cdot rdrd\theta \qquad \left(D' : -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta\right)$$

$$= \iint_{D'} r^3\sin^2\theta drd\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} r^3\sin^2\theta dr\right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\sin^2\theta\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta\sin^2\theta d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta(1-\cos^2\theta)d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\theta-\cos^6\theta)d\theta$$

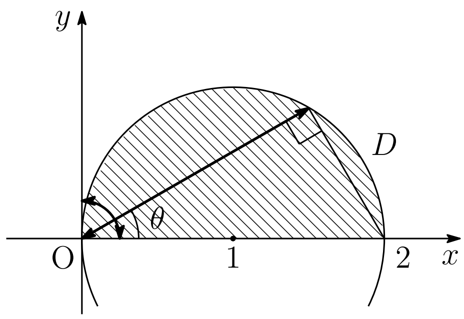
$$= 8\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

(4) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy \qquad (D : x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0)$

$$= \iint_{D'} (r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot rdrd\theta \qquad \left(D' : 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta\right)$$

$$= \iint_{D'} r^4 drd\theta$$



$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} r^4 dr\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5}\cos^5\theta d\theta$$

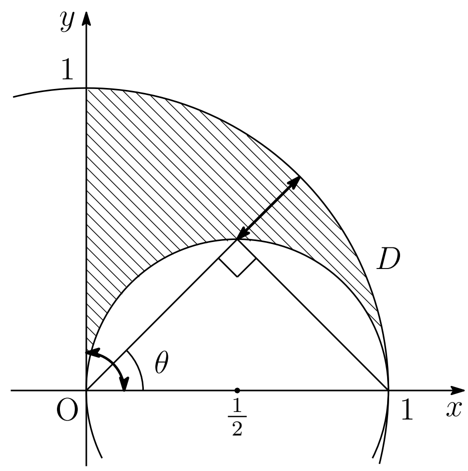
$$= \frac{32}{5}\cdot\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}\cdot 1$$

$$= \frac{256}{75}$$

$$(5)\quad \iint_D x^2 dxdy \qquad (D : x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$$

$$= \iint_{D'} r^2 \cos^2\theta \cdot r dr d\theta \qquad \left(D' : 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leqq r \leqq 1\right)$$

$$= \iint_{D'} r^3 \cos^2\theta dr d\theta$$



$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos\theta}^1 r^3 \cos^2\theta dr\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\cos^2\theta\right]_{r=\cos\theta}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(1-\cos^4\theta)\cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - \cos^6\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{128}\pi$$

$$(6)\quad \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dxdy \qquad (D : x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$$

$$= \iint_{D'} \sqrt{1-r^2} \cdot r dr d\theta \qquad \left(D' : 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leqq r \leqq 1\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{-\frac{1}{2}\int_{\cos\theta}^1 (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2r) dr\right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=\cos\theta}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}(0-\sin^3\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$$

$$= \frac{2}{9}$$

(7) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \qquad (D : x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

$$= \iint_{D'} \sqrt{r^2}\cdot r dr d\theta \qquad \left(D' : 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leqq r \leqq 1\right)$$

$$= \iint_{D'} r^2 dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos\theta}^1 r^2 dr\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=\cos\theta}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(1-\cos^3\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}$$

(8) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy \qquad (D : x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

$$= \iint_{D'} r\sin\theta\cdot r dr d\theta \qquad \left(D' : 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leqq r \leqq 1\right)$$

$$= \iint_{D'} r^2 \sin\theta dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos\theta}^1 r^2 \sin\theta dr\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\sin\theta\right]_{r=\cos\theta}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(1-\cos^3\theta)\sin\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\sin\theta+\cos^3\theta\cdot(-\sin\theta)\right\}d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\left[\frac{1}{4}\cos^4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{1+\frac{1}{4}(0-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}$$